Algoritmos de aproximación para aumentar la vértice-conectividad de un ciclo

Francisco Sanhueza Matamala

Profesor Guía: José Soto San Martín
Profesor Co-Guía: José Correa Haeussler
Profesor Integrante: Ivan Rapaport Zimermann
Profesor Integrante: Waldo Gálvez Verdugo

28 de mayo de 2021 · Defensa de Tesis

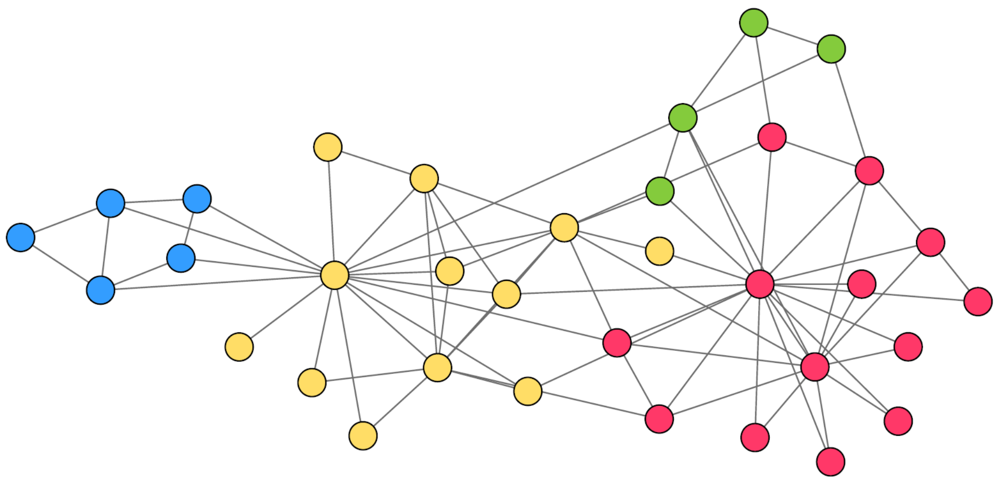
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Contexto

- Diseño de redes

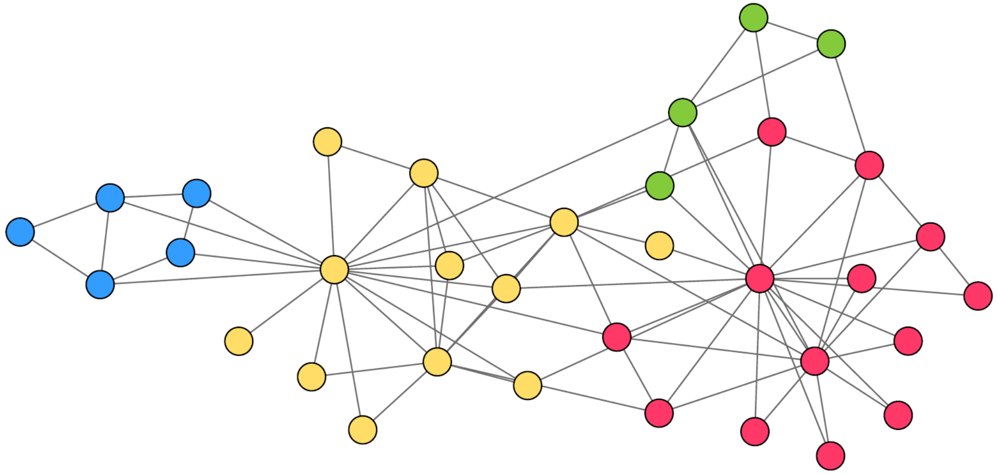
Contexto

- Diseño de redes



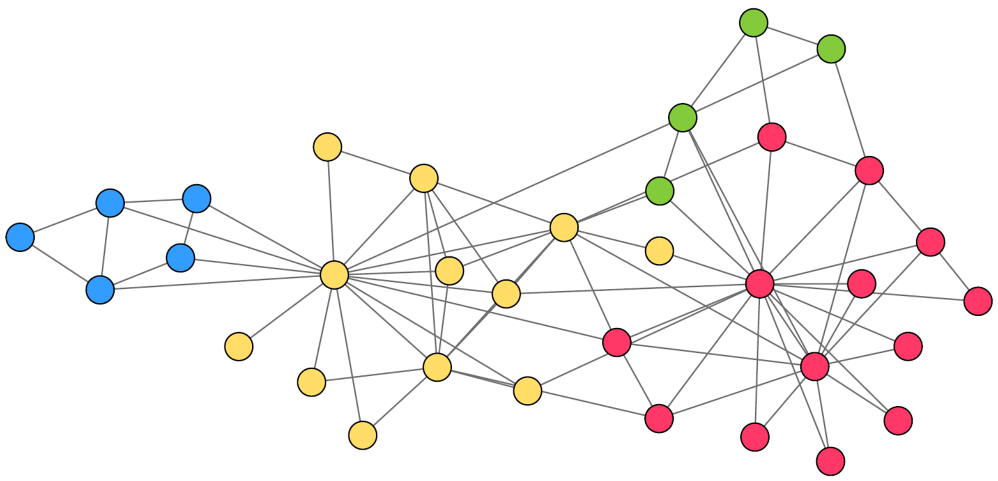
Contexto

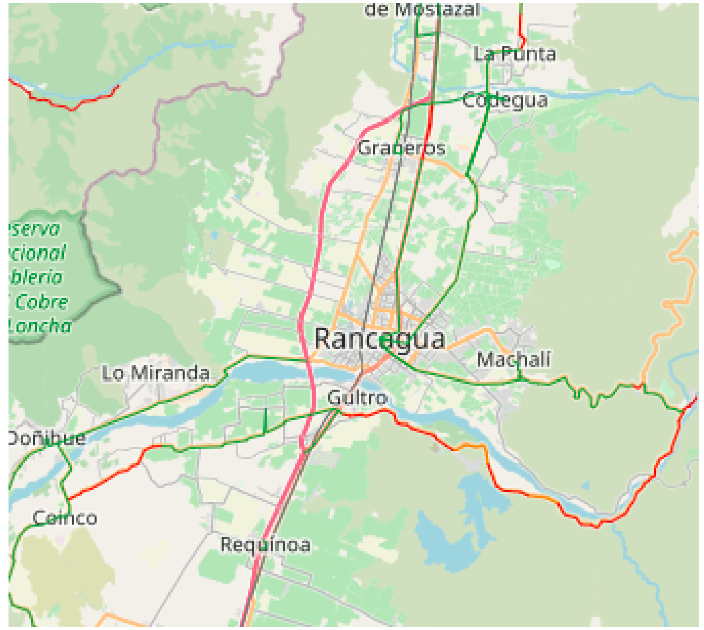
- Diseño de redes



Contexto

- Diseño de redes



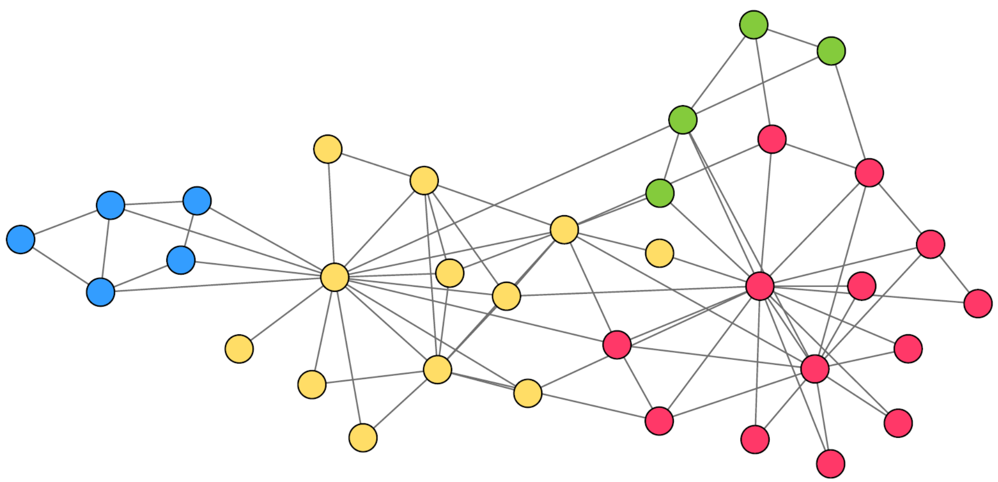


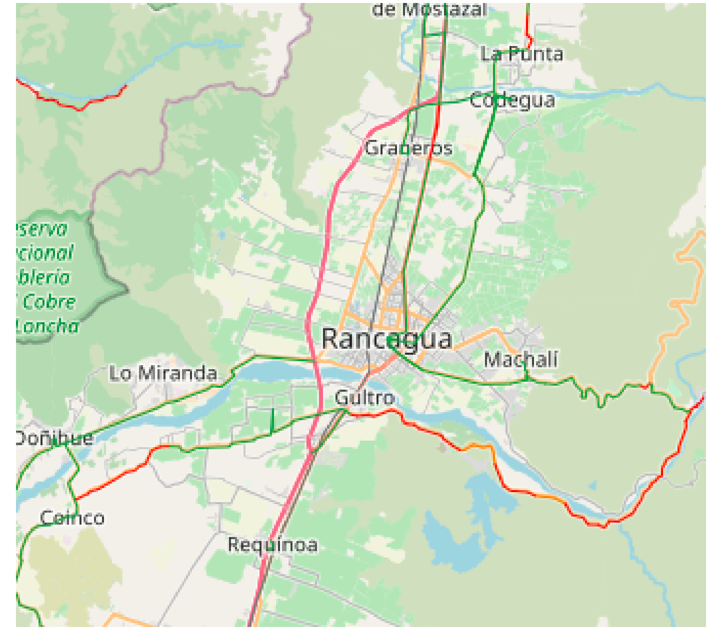
Algunas preguntas típicas en redes complejas

- ¿Cómo aumentar la **robustez**?

Contexto

- Diseño de redes



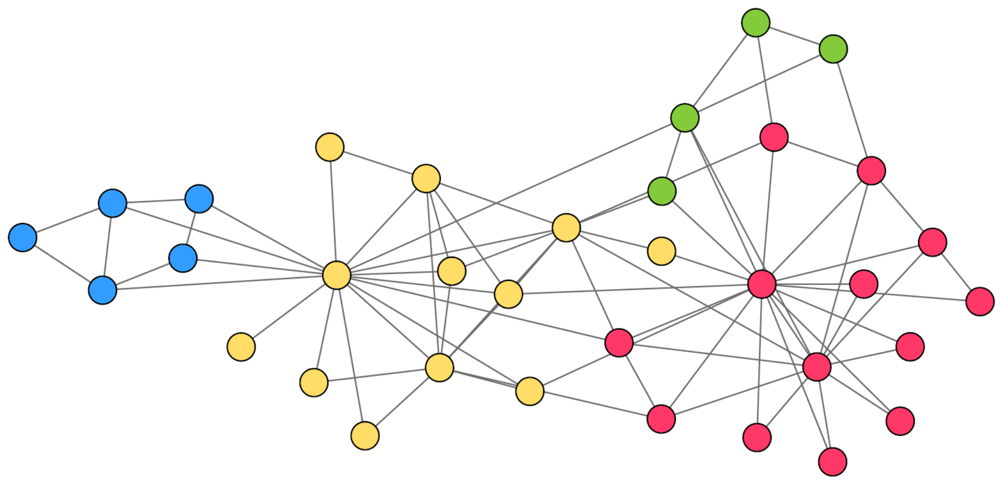


Algunas preguntas típicas en redes complejas

- ¿Cómo aumentar la **robustez**?
- ¿Cómo aumentar la **conexidad**?

Contexto

- Diseño de redes



Algunas preguntas típicas en redes complejas

- ¿Cómo aumentar la **robustez**?
- ¿Cómo aumentar la **conexidad**?

Motivación: Cableado de fibra óptica.
¿Como construyes 3 caminos vértice disjuntos que vayan de una ciudad a otra a costo mínimo?

Algoritmos de Aproximación

Definición Un **Algoritmo de α-aproximación** para un problema de optimización es un algoritmo en tiempo polinomial que para todas las instancias del problema produce una solución cuyo valor está dentro de un factor α del óptimo

Algoritmos de Aproximación

Definición Un **Algoritmo de α-aproximación** para un problema de optimización es un algoritmo en tiempo polinomial que para todas las instancias del problema produce una solución cuyo valor está dentro de un factor α del óptimo

En el caso de minimización

$$OPT \leq ALG \leq \alpha OPT$$

Algoritmos de Aproximación

Definición Un **Algoritmo de α-aproximación** para un problema de optimización es un algoritmo en tiempo polinomial que para todas las instancias del problema produce una solución cuyo valor está dentro de un factor α del óptimo

En el caso de minimización

$$OPT \leq ALG \leq \alpha OPT$$

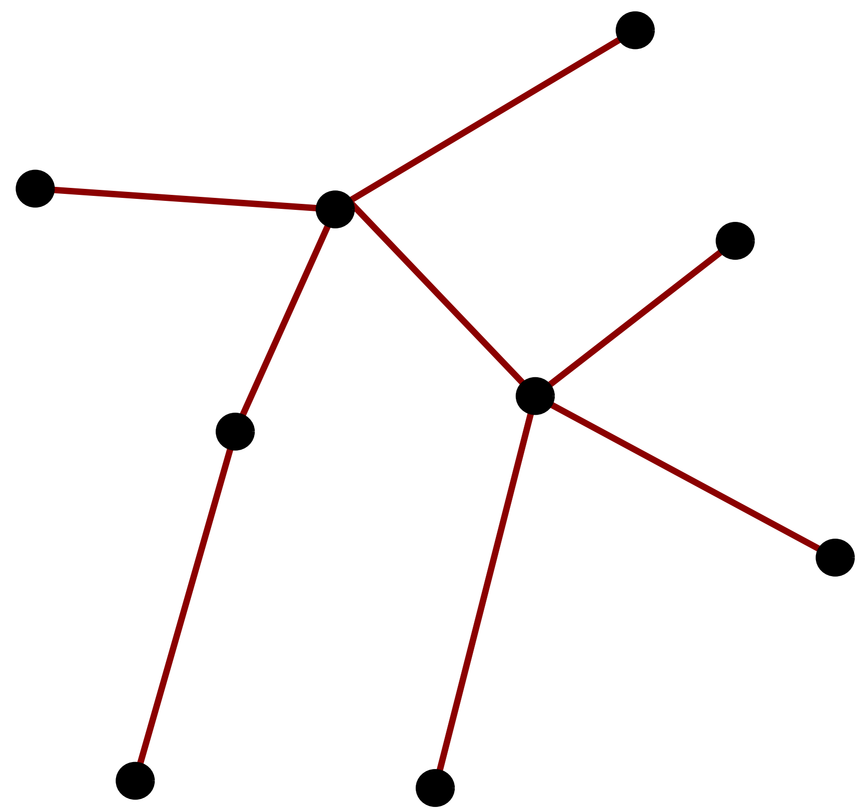
$$\alpha > 1$$

Aumentación de grafos

Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo

Aumentación de grafos

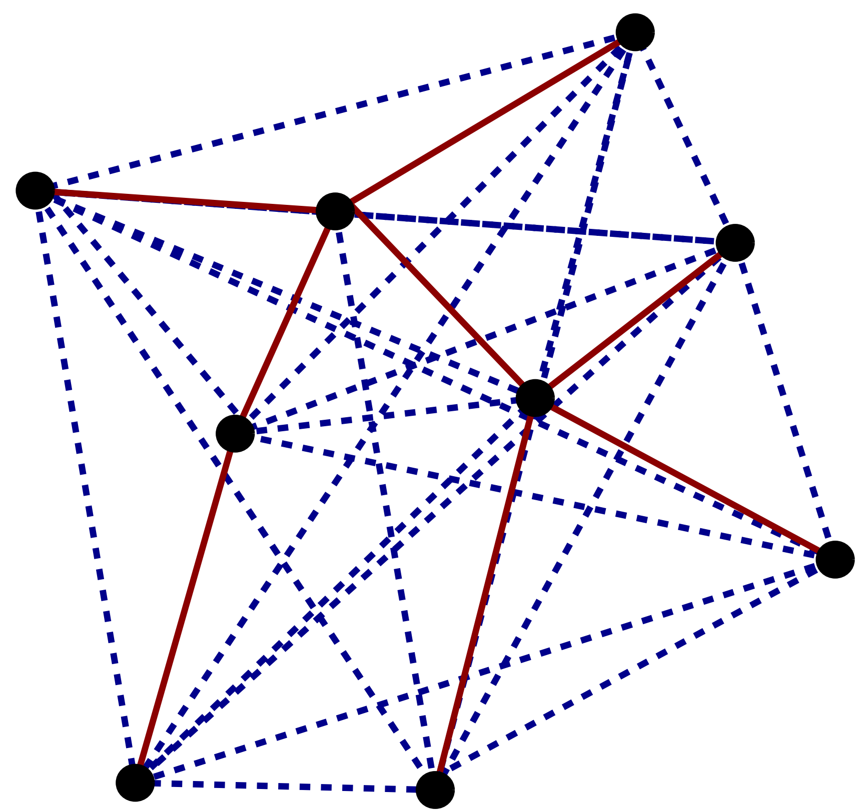
Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo



Caso $k = 1$

Aumentación de grafos

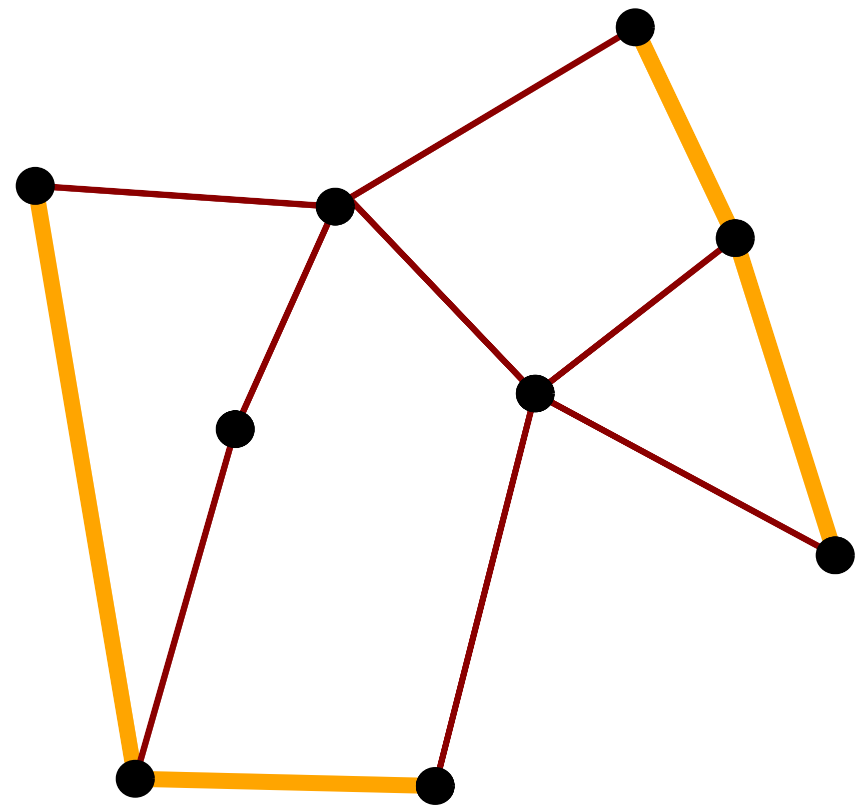
Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo



Caso $k = 1$

Aumentación de grafos

Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo



Caso $k = 1$

Aumentación de grafos

Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo

Casos resueltos

	Grafos no dirigidos	Grafos dirigidos
Arista-conectividad		
Vértice-conectividad		

Aumentación de grafos

Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo

Casos resueltos

	Grafos no dirigidos	Grafos dirigidos
Arista-conectividad	Watanabe y Nakamura (1987)	
Vértice-conectividad		

Aumentación de grafos

Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo

Casos resueltos

	Grafos no dirigidos	Grafos dirigidos
Arista-conectividad	Watanabe y Nakamura (1987)	Frank (1992)
Vértice-conectividad		

Aumentación de grafos

Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo

Casos resueltos

	Grafos no dirigidos	Grafos dirigidos
Arista-conectividad	Watanabe y Nakamura (1987)	Frank (1992)
Vértice-conectividad		Frank y Jordan (1995)

Aumentación de grafos

Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo

Casos resueltos

	Grafos no dirigidos	Grafos dirigidos
Arista-conectividad	Watanabe y Nakamura (1987)	Frank (1992)
Vértice-conectividad	Vegh (2010)	Frank y Jordan (1995)

Aumentación de grafos

Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo

Casos resueltos

	Grafos no dirigidos	Grafos dirigidos
Arista-conectividad	Watanabe y Nakamura (1987)	Frank (1992)
Vértice-conectividad	Vegh (2010)	Frank y Jordan (1995)

Todos estos casos suponen que puedes escoger cualquier arista posible. ¿Qué pasaría si tuvieses restricciones?

Aumentación de grafos

Definición informal: Dado un grafo $G = (V, E)$ $k-$conexo, como encontrar el conjunto de aristas E' de menor tamaño entre los vértices tal que $G' = (V, E \cup E')$ sea $(k+1)$-conexo

Casos resueltos

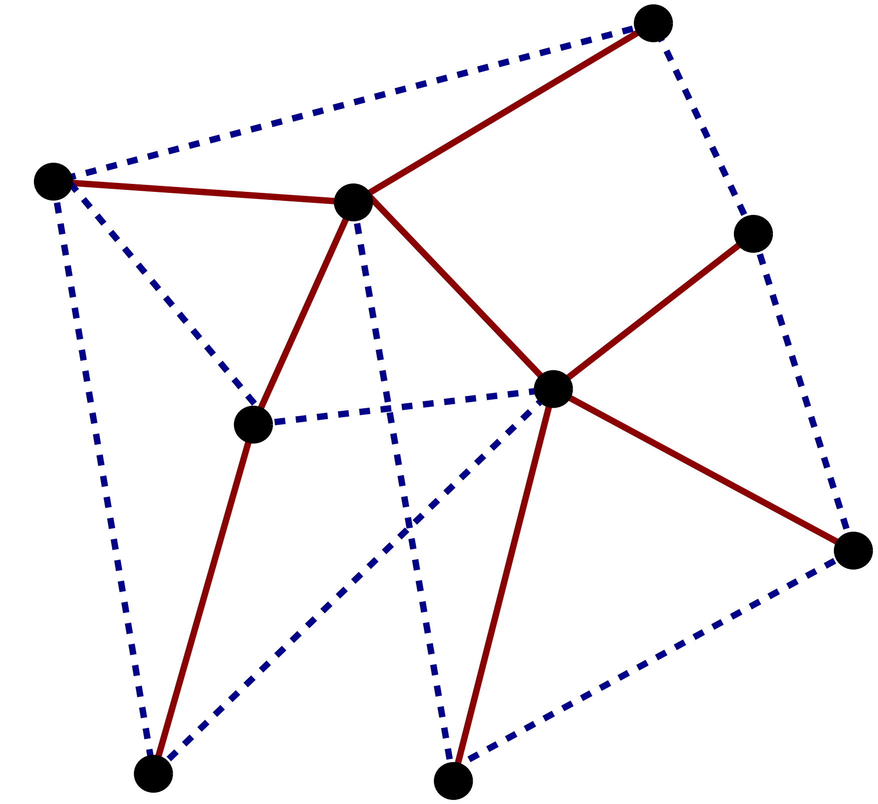
	Grafos no dirigidos	Grafos dirigidos
Arista-conectividad	Watanabe y Nakamura (1987)	Frank (1992)
Vértice-conectividad	Vegh (2010)	Frank y Jordan (1995)

Todos estos casos suponen que puedes escoger cualquier arista posible. ¿Qué pasaría si tuvieses restricciones?

$\mathbf{NP}$-dificil en muchos casos!

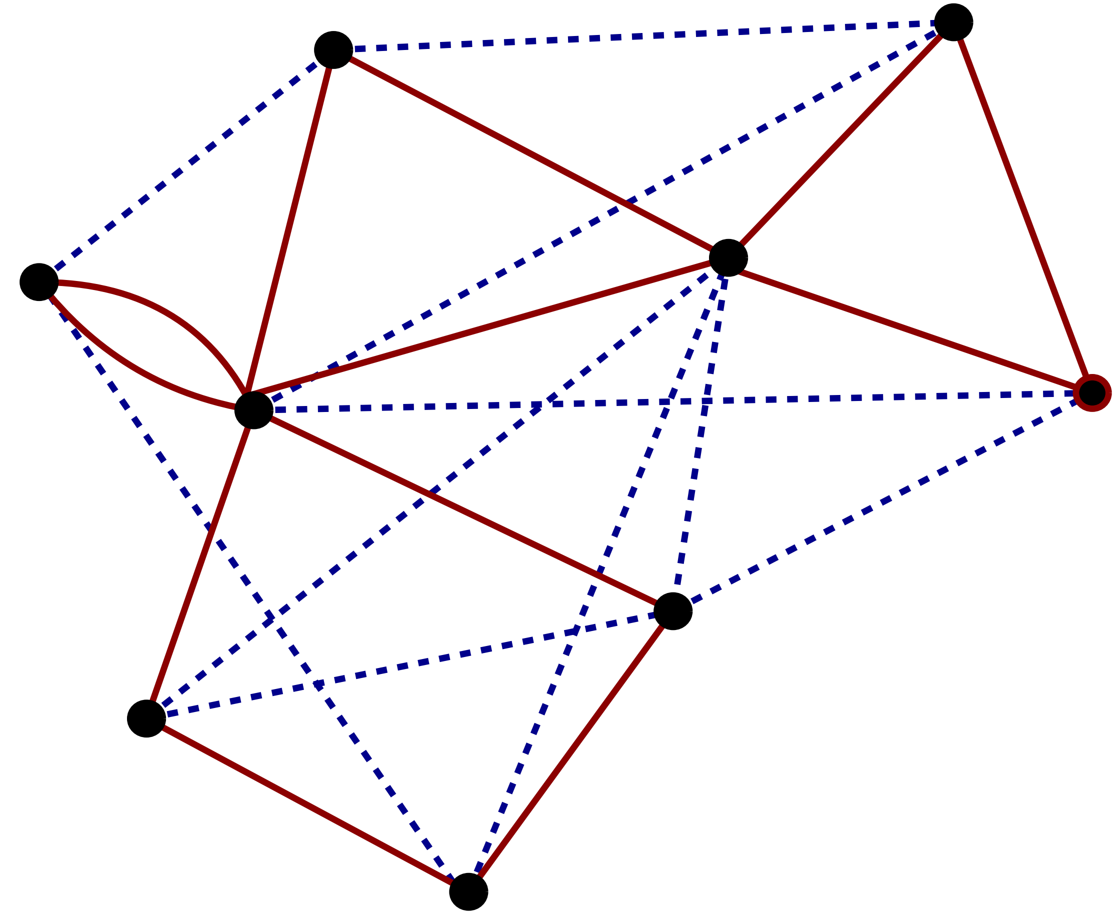
Aumentando arista-conectividad.

- 2018: Grandoni, Kalaitzis, Zenklusen
  $\rightarrow 1.458$ para aumentar un árbol



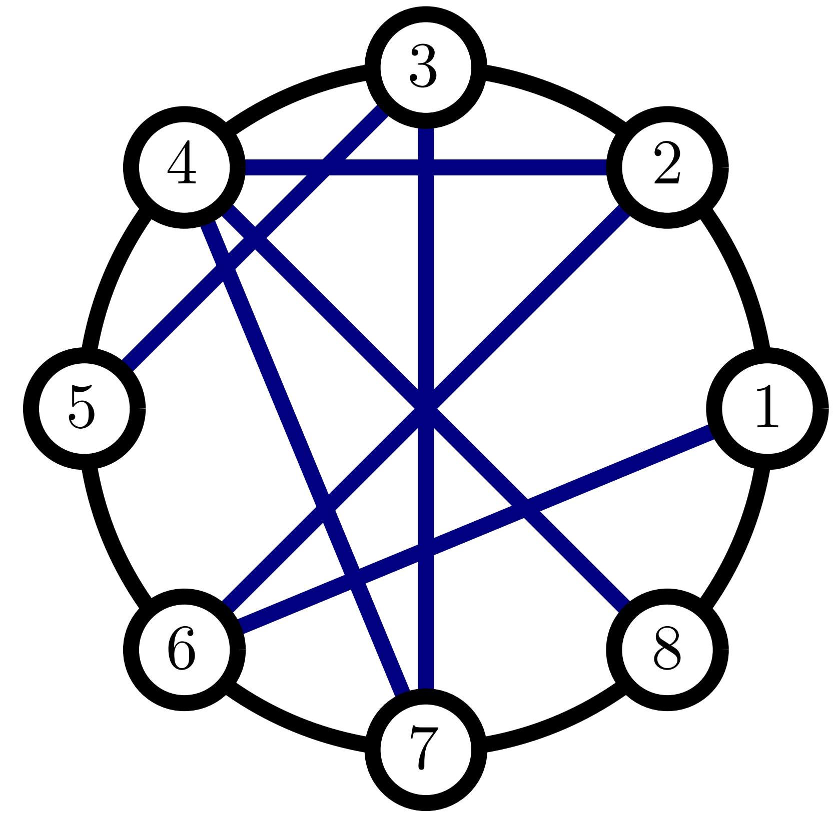
Aumentando arista-conectividad.

- 2018: Grandoni, Kalaitzis, Zenklusen
  $\rightarrow 1.458$ para aumentar un árbol
- 2019: Byrka, Grandoni y Jabal Ameli
  $\rightarrow 1.91$ para aumentar un cáctus



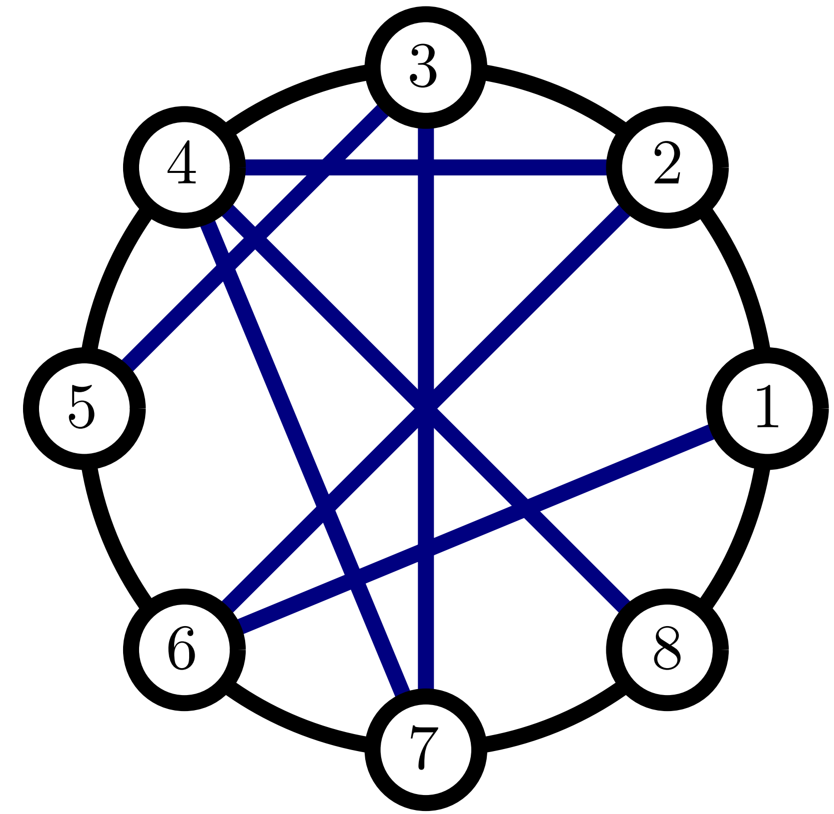
Aumentando arista-conectividad.

- 2018: Grandoni, Kalaitzis, Zenklusen $\rightarrow 1.458$ para aumentar un árbol
- 2019: Byrka, Grandoni y Jabal Ameli $\rightarrow 1.91$ para aumentar un cáctus
- 2019: Gálvez, Grandoni, Jabal Ameli y Sornat $\rightarrow 1.5 + \varepsilon$ para el **ciclo**



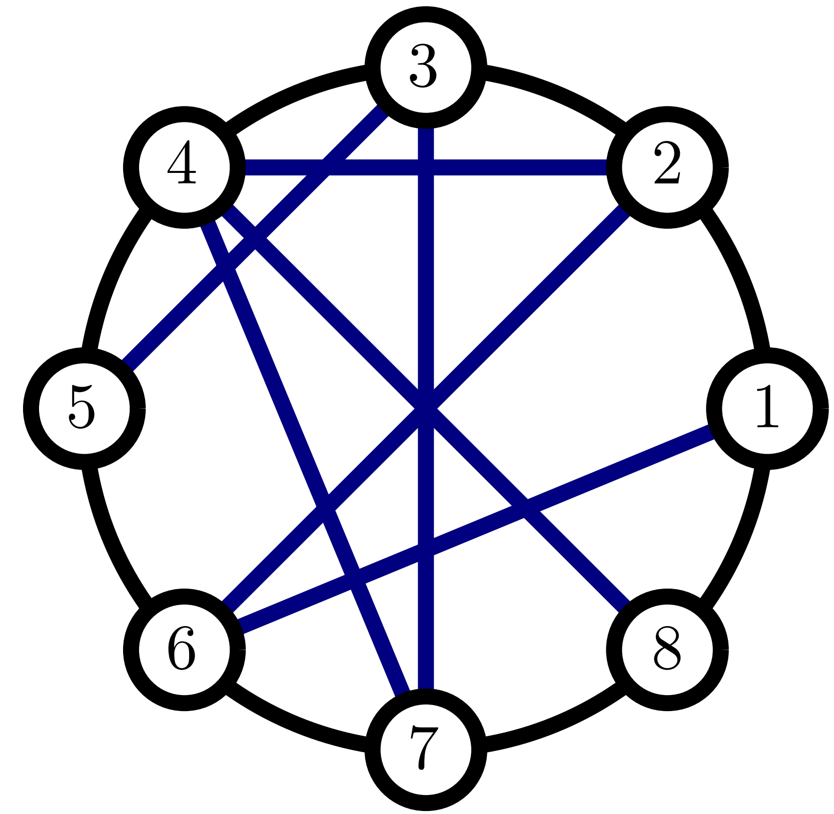
Aumentando arista-conectividad.

- 2018: Grandoni, Kalaitzis, Zenklusen $\rightarrow 1.458$ para aumentar un árbol
- 2019: Byrka, Grandoni y Jabal Ameli $\rightarrow 1.91$ para aumentar un cáctus
- 2019: Gálvez, Grandoni, Jabal Ameli y Sornat $\rightarrow 1.5 + \varepsilon$ para el **ciclo**
- 30 de noviembre de 2020: Cecchetto, Traub y Zenklusen $\rightarrow 1.393$ para el Cáctus.



Aumentando arista-conectividad.

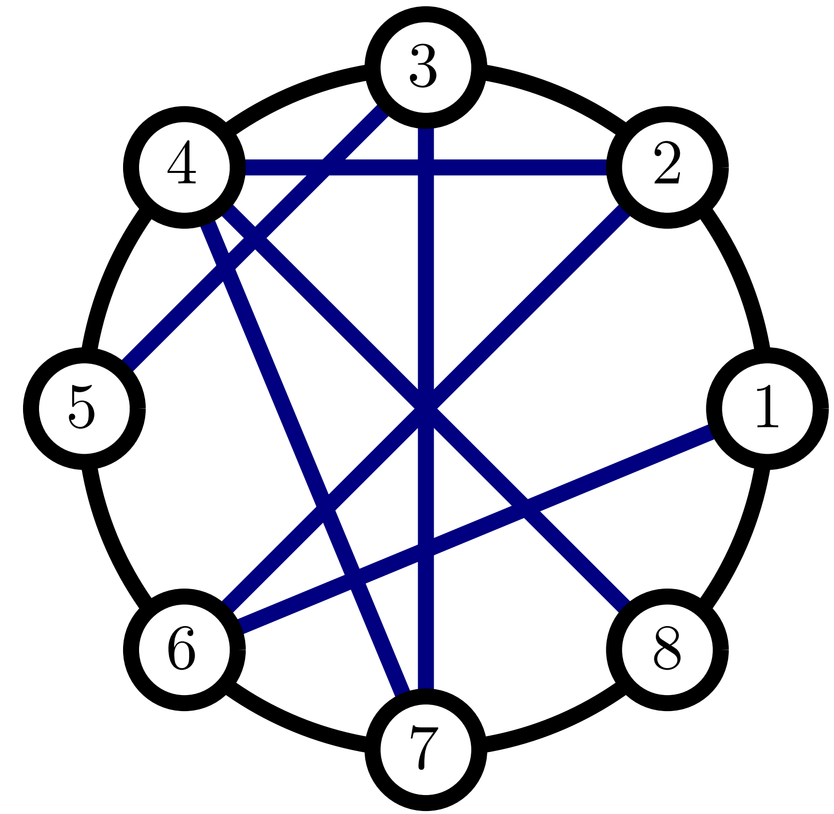
- 2018: Grandoni, Kalaitzis, Zenklusen $\rightarrow 1.458$ para aumentar un árbol
- 2019: Byrka, Grandoni y Jabal Ameli $\rightarrow 1.91$ para aumentar un cáctus
- 2019: Gálvez, Grandoni, Jabal Ameli y Sornat $\rightarrow 1.5 + \varepsilon$ para el **ciclo**
- 30 de noviembre de 2020: Cecchetto, Traub y Zenklusen $\rightarrow 1.393$ para el Cáctus.



Vértice-conectividad

Aumentando arista-conectividad.

- 2018: Grandoni, Kalaitzis, Zenklusen $\rightarrow 1.458$ para aumentar un árbol
- 2019: Byrka, Grandoni y Jabal Ameli $\rightarrow 1.91$ para aumentar un cáctus
- 2019: Gálvez, Grandoni, Jabal Ameli y Sornat $\rightarrow 1.5 + \varepsilon$ para el **ciclo**
- 30 de noviembre de 2020: Cecchetto, Traub y Zenklusen $\rightarrow 1.393$ para el Cáctus.

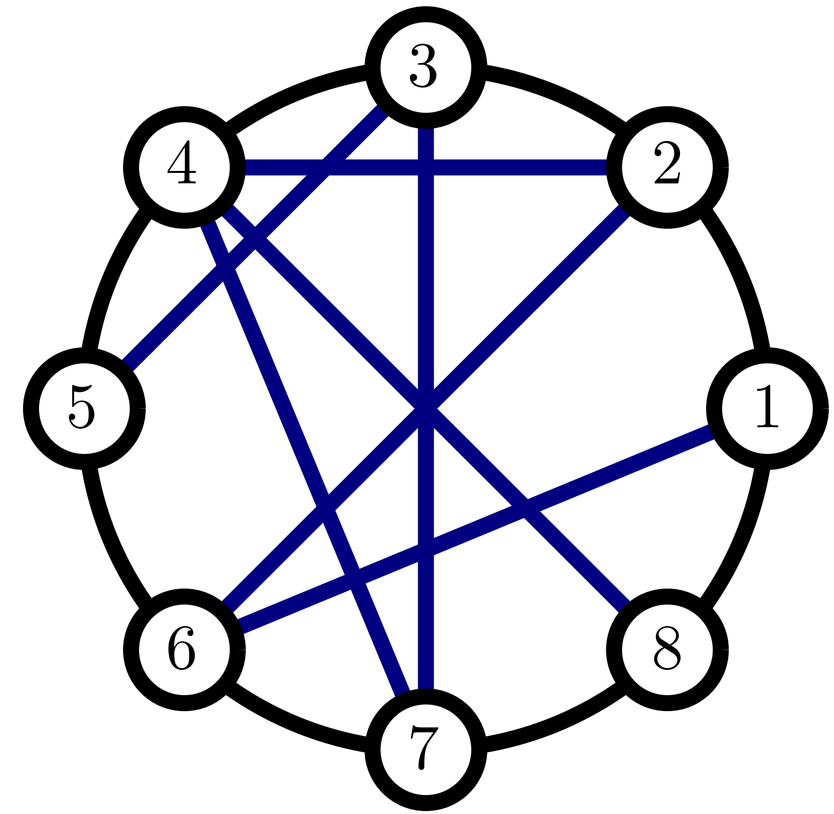


Vértice-conectividad

- 2017: Nutov $\rightarrow$ mejores ratios hasta ahora para cualquier k. $O(log(\frac{n}{n-k}))$.

Aumentando arista-conectividad.

- 2018: Grandoni, Kalaitzis, Zenklusen $\rightarrow 1.458$ para aumentar un árbol
- 2019: Byrka, Grandoni y Jabal Ameli $\rightarrow 1.91$ para aumentar un cáctus
- 2019: Gálvez, Grandoni, Jabal Ameli y Sornat $\rightarrow 1.5 + \varepsilon$ para el **ciclo**
- 30 de noviembre de 2020: Cecchetto, Traub y Zenklusen $\rightarrow 1.393$ para el Cáctus.

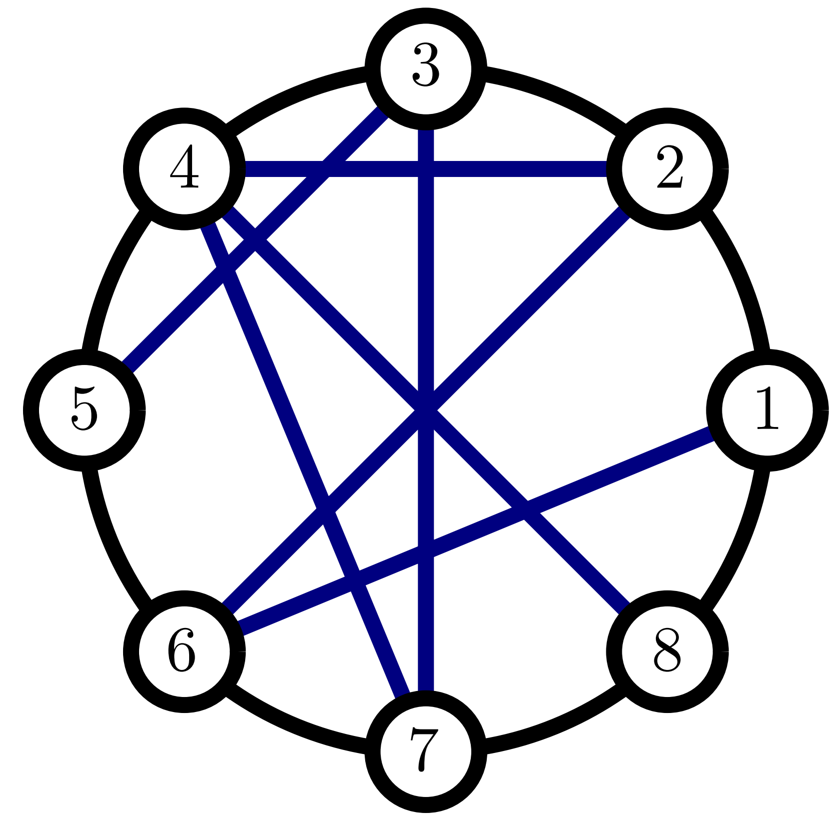


Vértice-conectividad

- 2017: Nutov $\rightarrow$ mejores ratios hasta ahora para cualquier k. $O(log(\frac{n}{n-k}))$.
- 2020: Nutov usa el resultado de Grandoni para Cactus para mostrar un alg de aprox 1.91 para el árbol.

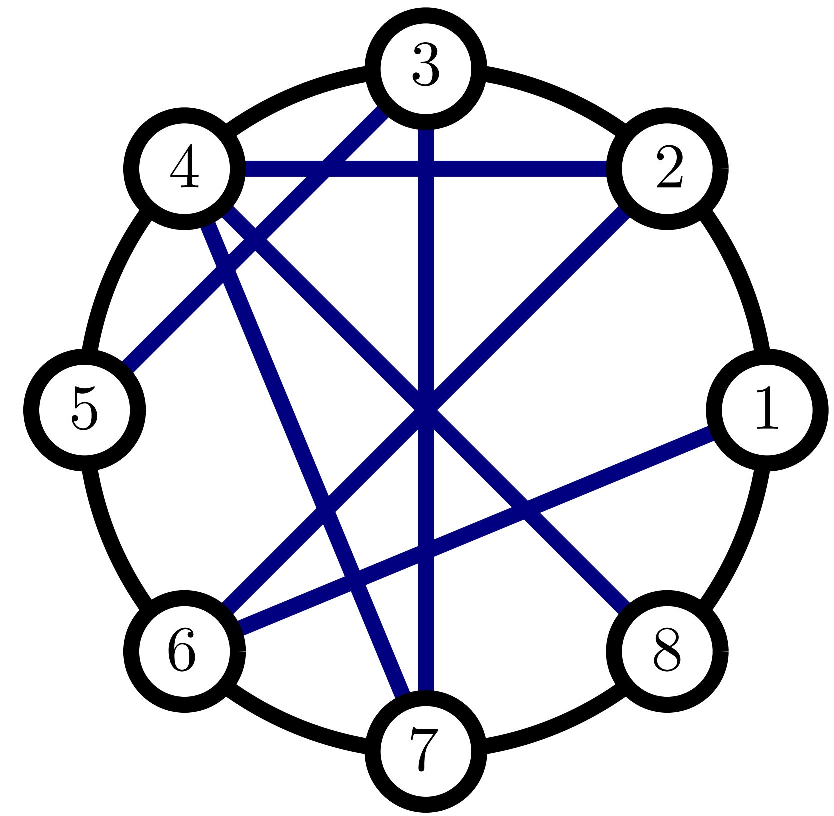
Definición del problema

- C_n ciclo de n vértices



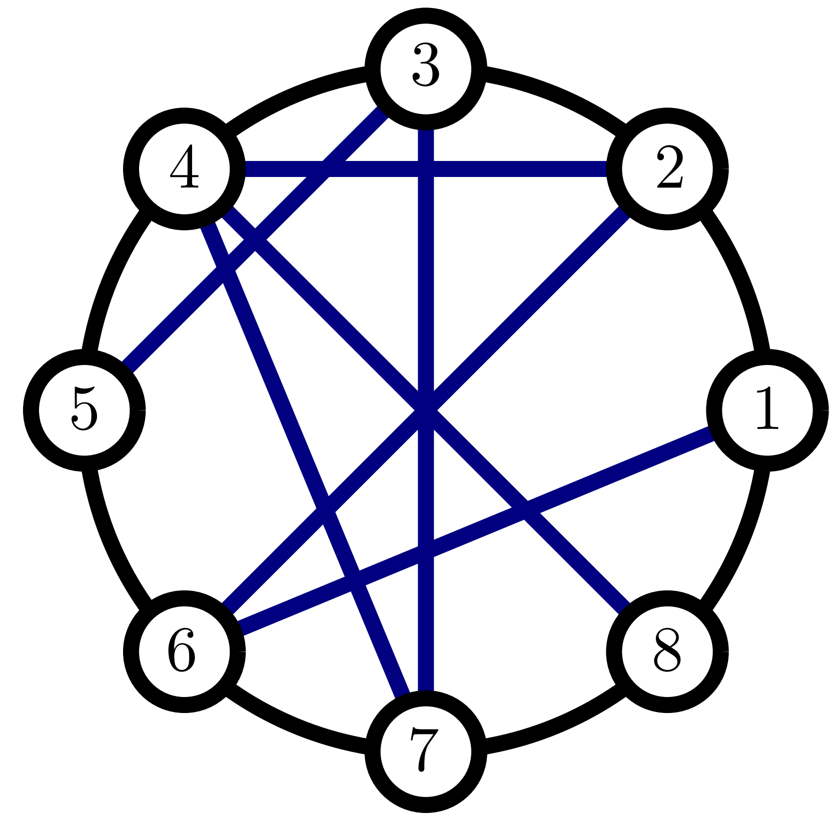
Definición del problema

- C_n ciclo de n vértices
- S conjunto de links candidatos



Definición del problema

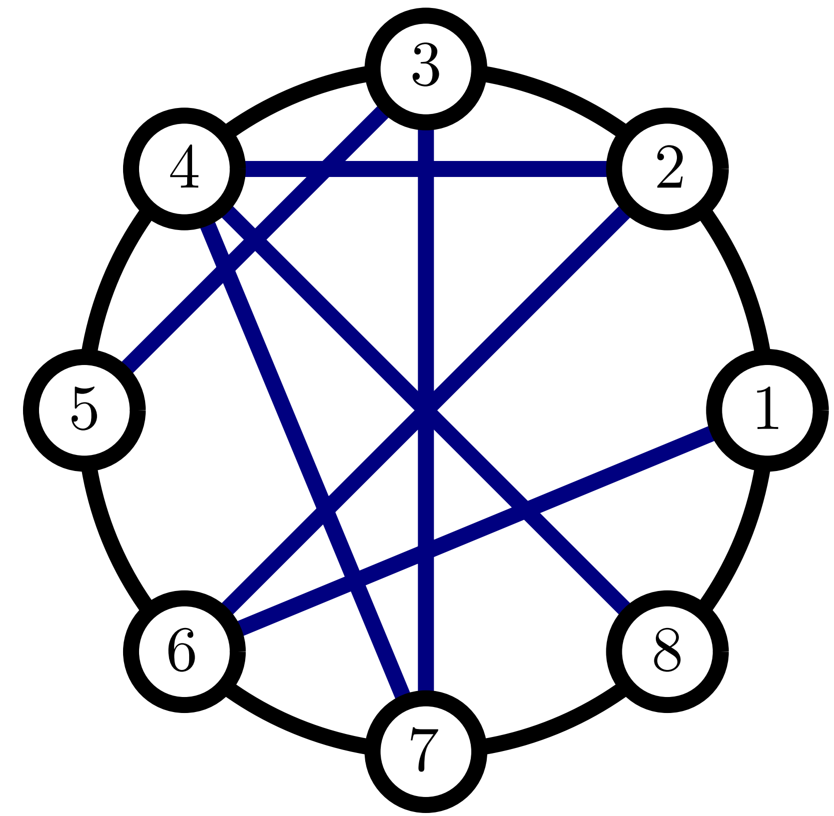
- C_n ciclo de n vértices
- S conjunto de links candidatos
- $C_n \cup S$ es 3-vértice-conexo



Definición del problema

- C_n ciclo de n vértices
- S conjunto de links candidatos
- $C_n \cup S$ es 3-vértice-conexo

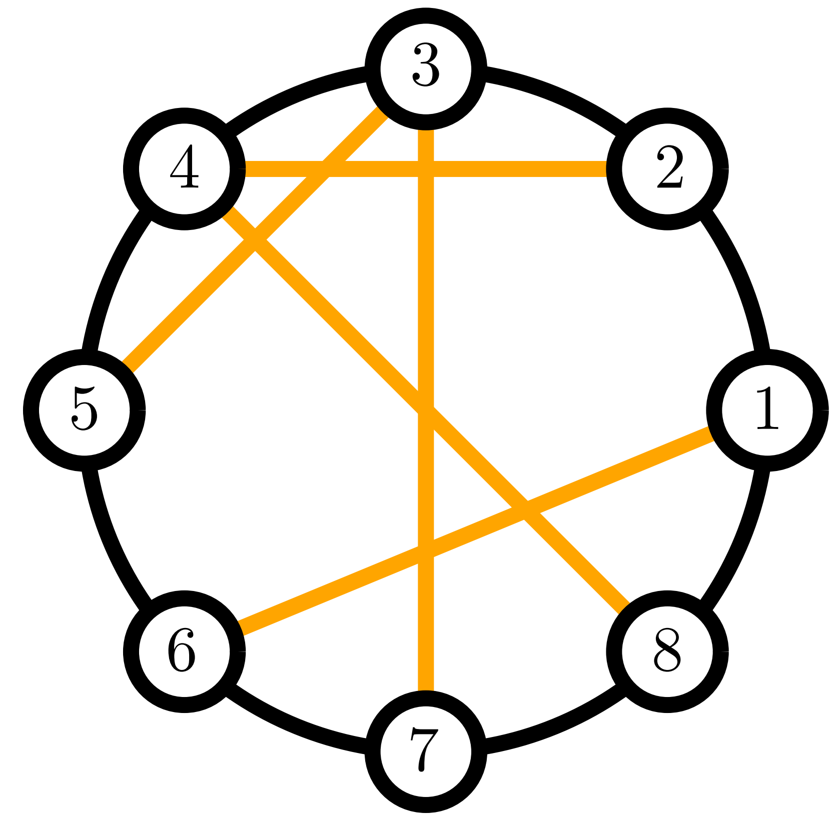
Problema: Encontrar conjunto de menor tamaño $F \subseteq S$ tal que $C_n \cup F$ sea 3-vértice-conexo



Definición del problema

- C_n ciclo de n vértices
- S conjunto de links candidatos
- $C_n \cup S$ es 3-vértice-conexo

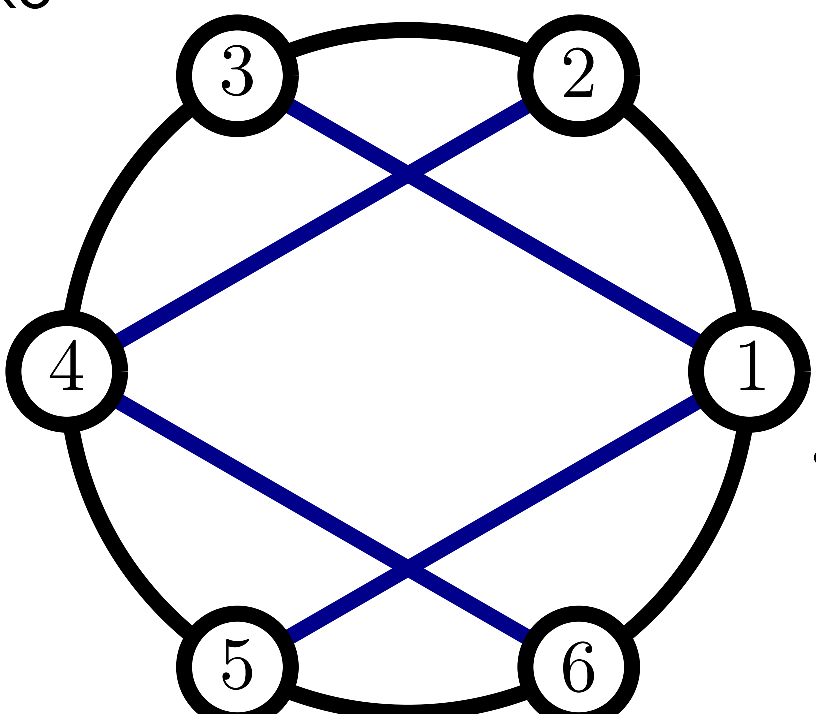
Problema: Encontrar conjunto de menor tamaño $F \subseteq S$ tal que $C_n \cup F$ sea 3-vértice-conexo

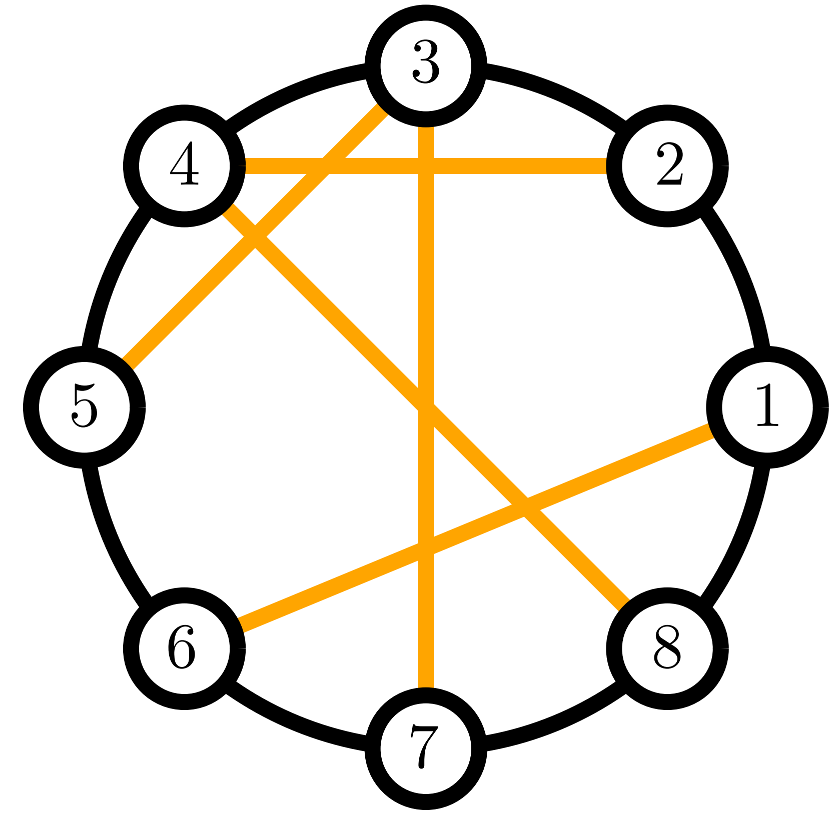


Definición del problema

- C_n ciclo de n vértices
- S conjunto de links candidatos
- $C_n \cup S$ es 3-vértice-conexo

Problema: Encontrar conjunto de menor tamaño $F \subseteq S$ tal que $C_n \cup F$ sea 3-vértice-conexo





Ojo que es 3-vértice-conexa, no 3-arista-conexa!

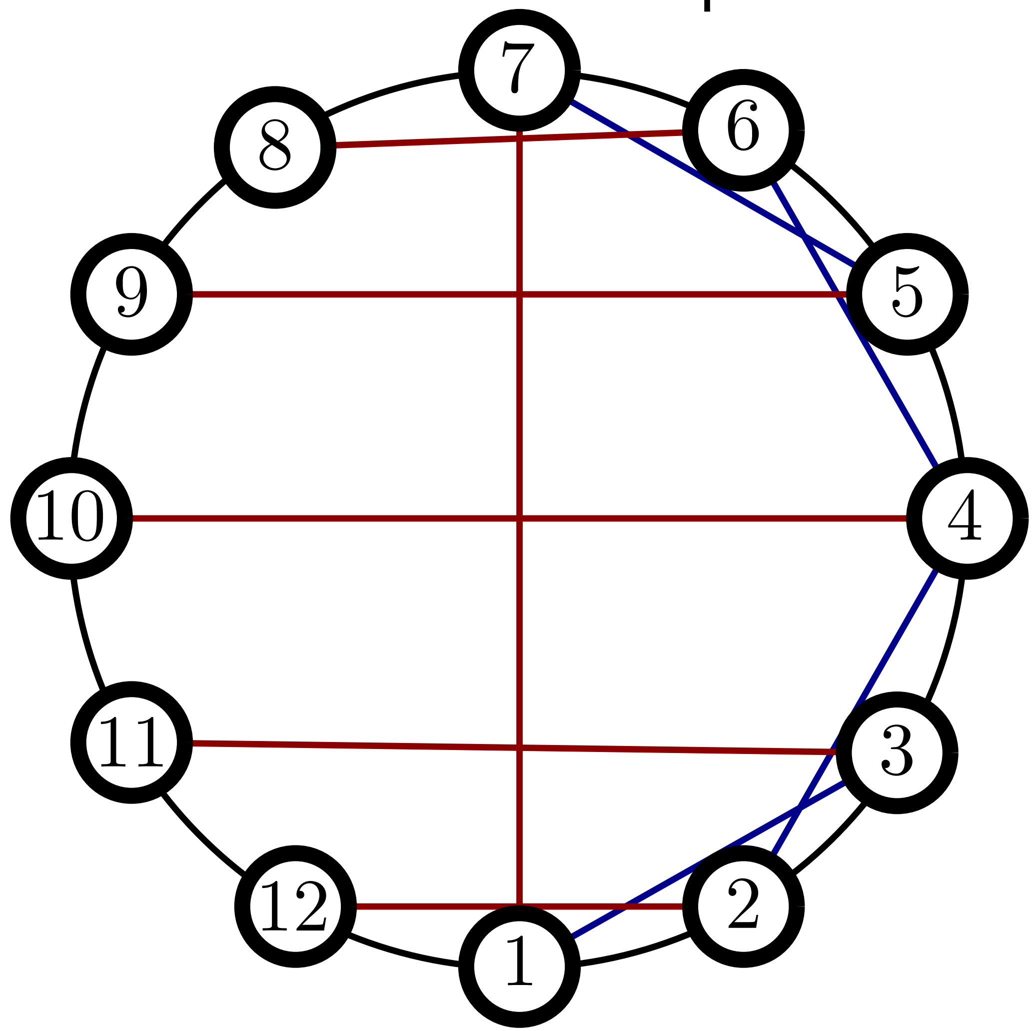
Comentarios Importantes

El problema es $\mathbf{NP}$-difícil y $\mathbf{APX}$-difícil al igual que en la versión aristas

Comentarios Importantes

El problema es **NP**-difícil y **APX**-difícil al igual que en la versión aristas

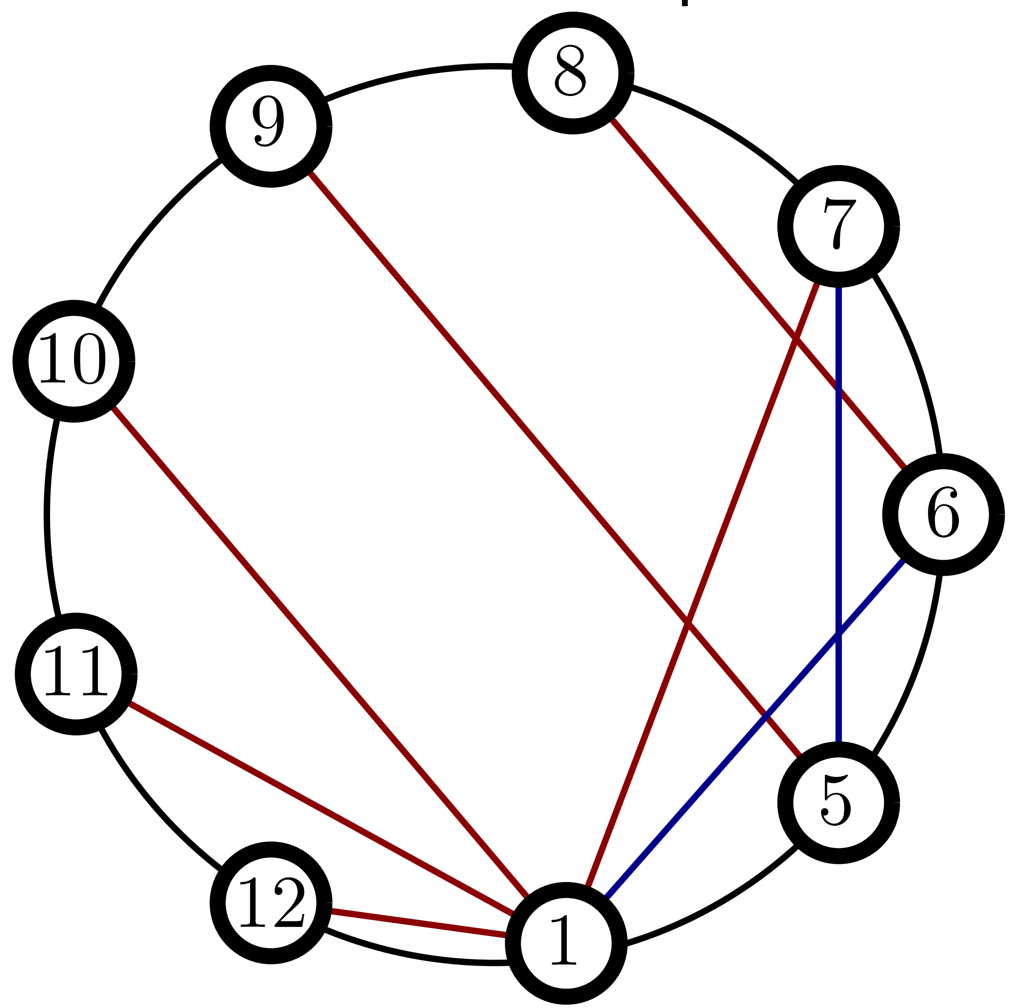
Estrategia usada por Galvez *et al.* no se puede usar acá



Comentarios Importantes

El problema es **NP**-difícil y **APX**-difícil al igual que en la versión aristas

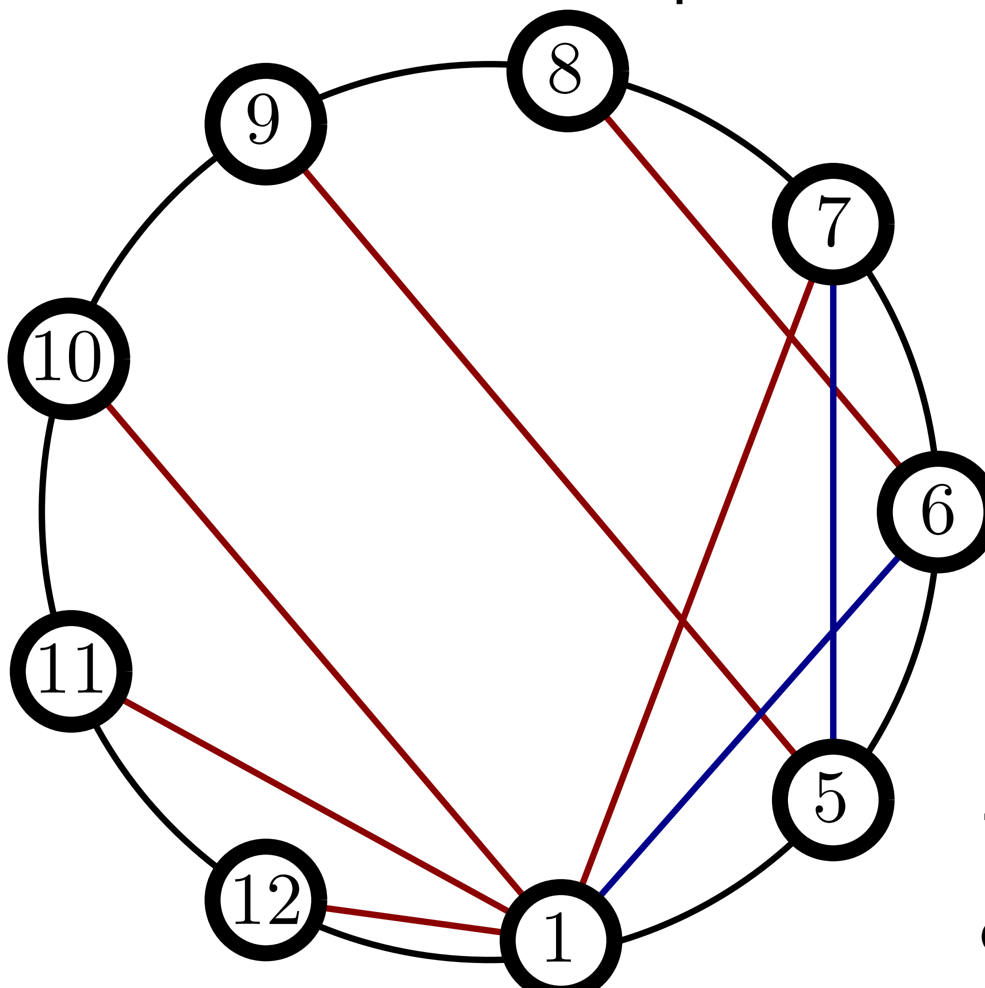
Estrategia usada por Galvez *et al.* no se puede usar acá



Comentarios Importantes

El problema es **NP**-difícil y **APX**-difícil al igual que en la versión aristas

Estrategia usada por Galvez *et al.* no se puede usar acá



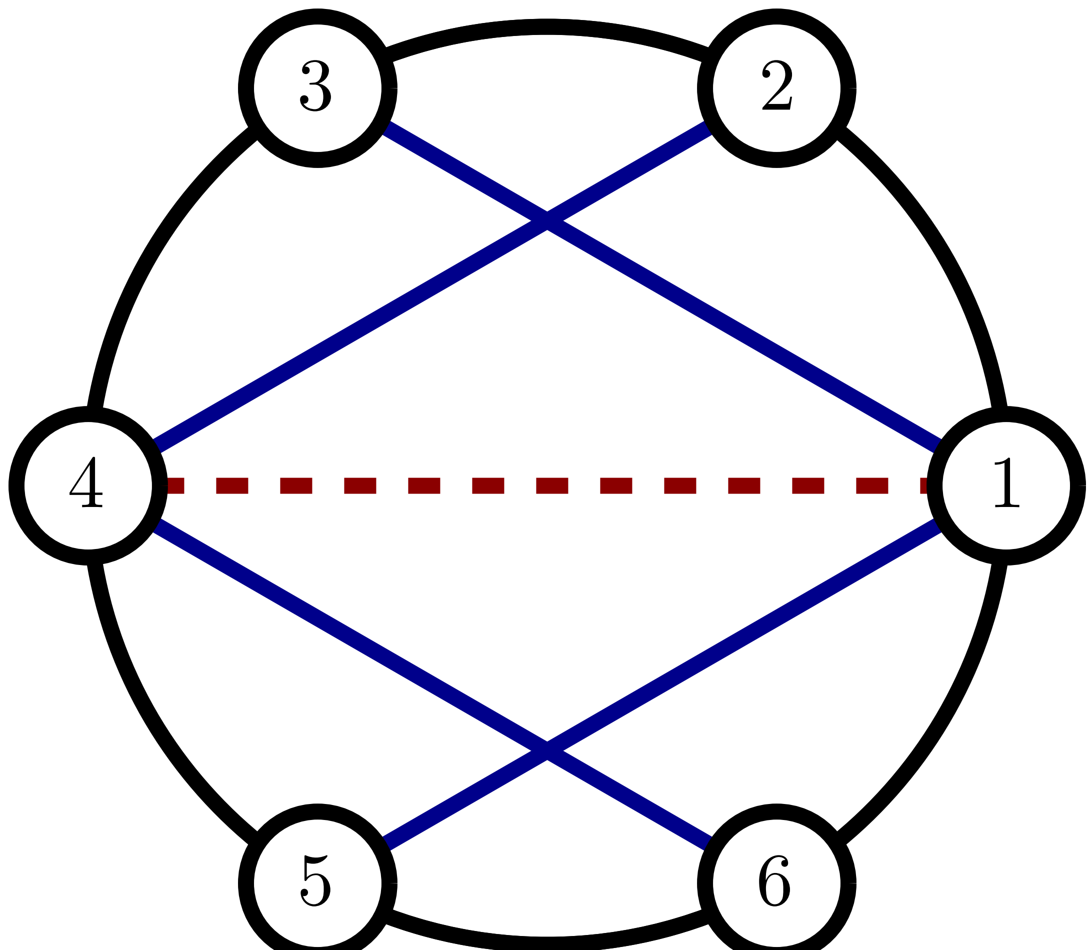
No se conserva la factibilidad de la solución en el caso de vértices

Propiedad importantísima

Todo par de vértices no consecutivos del ciclo **deben ser atravesados** en una solución

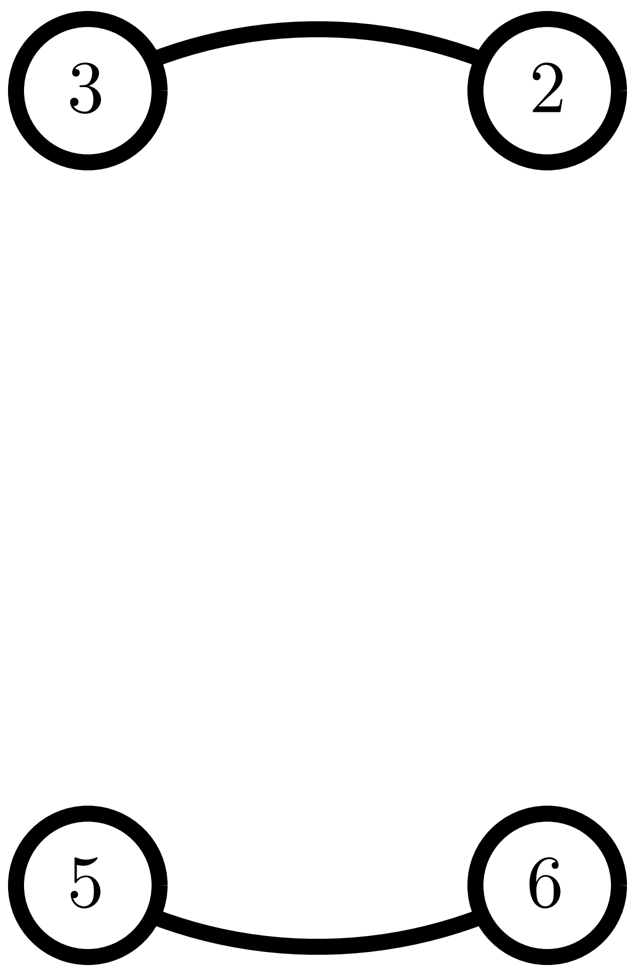
Propiedad importantísima

Todo par de vértices no consecutivos del ciclo **deben ser atravesados** en una solución



Propiedad importantísima

Todo par de vértices no consecutivos del ciclo **deben ser atravesados** en una solución



Todo par de vértices no consecutivos del ciclo **deben ser atravesados** en una solución

Resultado Principal

Para todo $\varepsilon > 0$, existe un algoritmo de aproximación de orden $\approx 1.87029 + \varepsilon$ para el problema de aumentar en uno la vértice-conectividad de un ciclo.

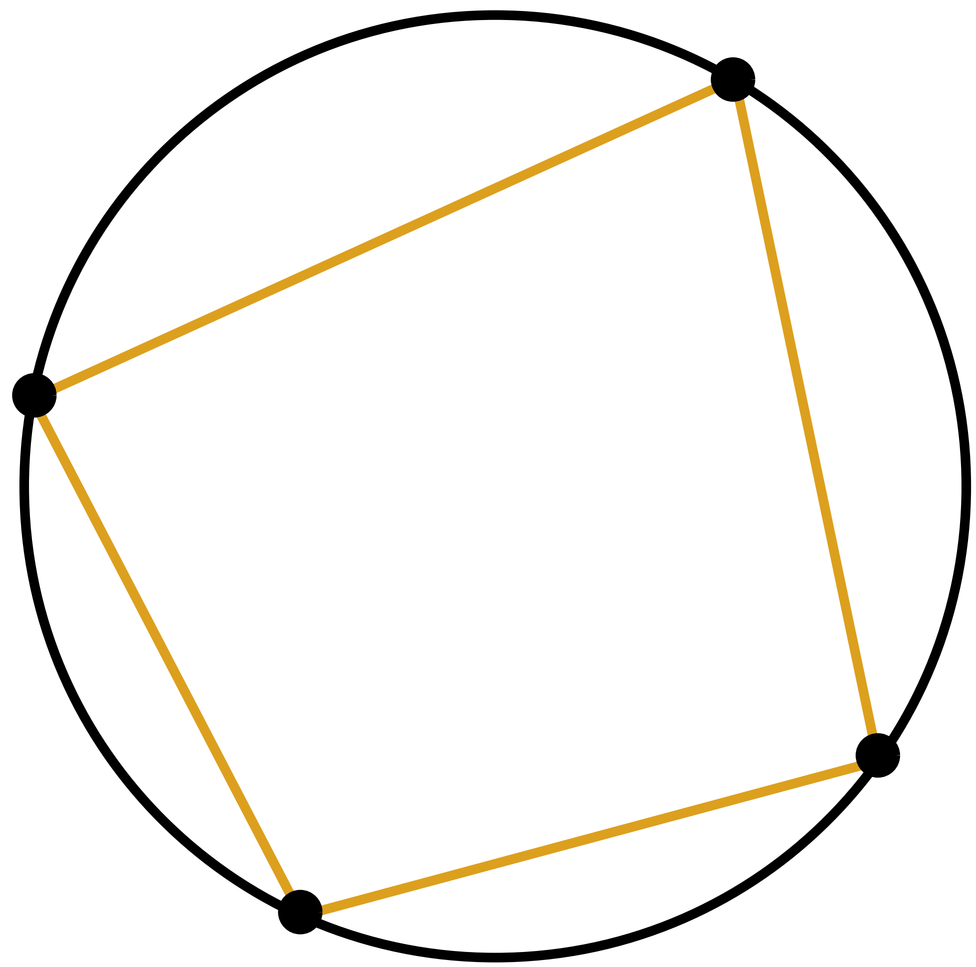
- Para el ciclo se puede deducir un algoritmo de 2-aprox muy sencillo usando resultados extremales de Mader (1972)

- Para el ciclo se puede deducir un algoritmo de 2-aprox muy sencillo usando resultados extremales de Mader (1972)

  "Todo ciclo en un grafo mínimamente k-vértice-conexo tiene un vértice de grado k"

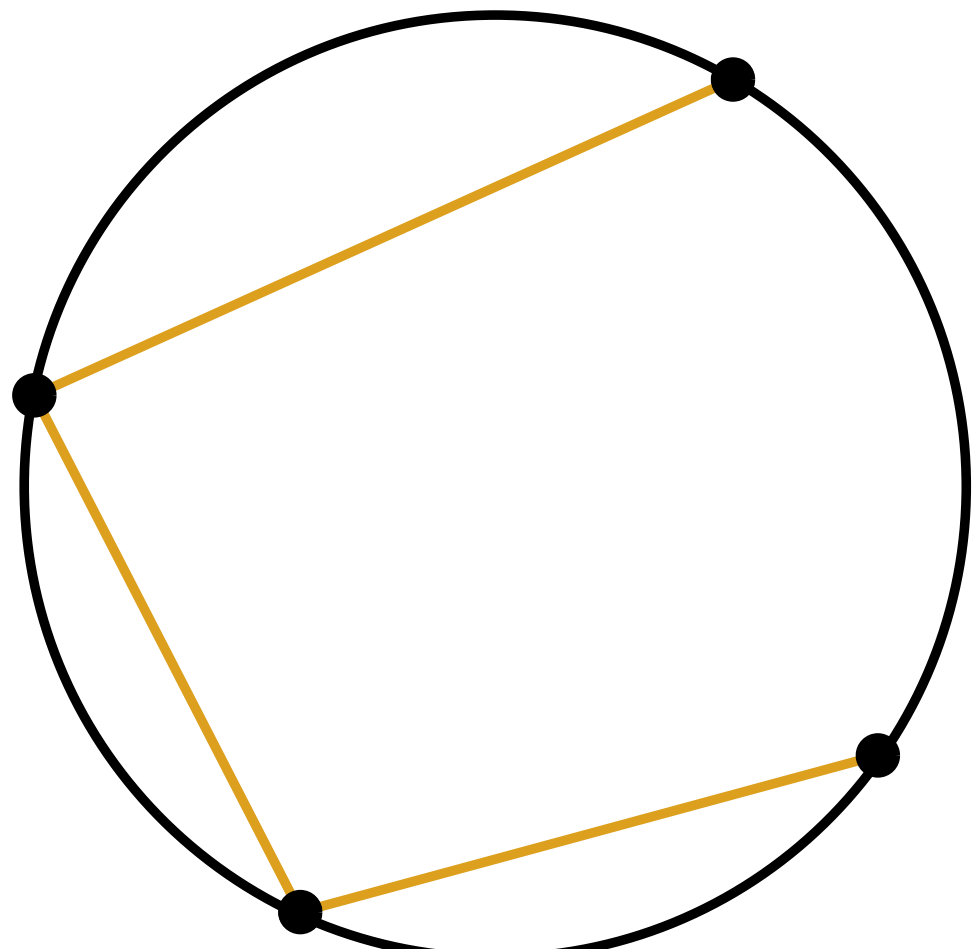
- Para el ciclo se puede deducir un algoritmo de 2-aprox muy sencillo usando resultados extremales de Mader (1972)

  "Todo ciclo en un grafo mínimamente k-vértice-conexo tiene un vértice de grado k"



- Para el ciclo se puede deducir un algoritmo de 2-aprox muy sencillo usando resultados extremales de Mader (1972)

  "Todo ciclo en un grafo mínimamente k-vértice-conexo tiene un vértice de grado k"



- Para el ciclo se puede deducir un algoritmo de 2-aprox muy sencillo usando resultados extremales de Mader (1972)

  "Todo ciclo en un grafo mínimamente k-vértice-conexo tiene un vértice de grado k"

Un conjunto minimal F de aristas que haga 3-vértice-conexo al ciclo no puede contener ciclos

- Para el ciclo se puede deducir un algoritmo de 2-aprox muy sencillo usando resultados extremales de Mader (1972)

  "Todo ciclo en un grafo mínimamente k-vértice-conexo tiene un vértice de grado k"

Un conjunto minimal F de aristas que haga 3-vértice-conexo al ciclo no puede contener ciclos

Como se cumple

$$OPT \geq \frac{n}{2} \tag{1}$$

Y además un arbol tiene $n-1$ aristas

- Para el ciclo se puede deducir un algoritmo de 2-aprox muy sencillo usando resultados extremales de Mader (1972)

  "Todo ciclo en un grafo mínimamente k-vértice-conexo tiene un vértice de grado k"

Un conjunto minimal F de aristas que haga 3-vértice-conexo al ciclo no puede contener ciclos

Como se cumple

$$OPT \geq \frac{n}{2} \tag{1}$$

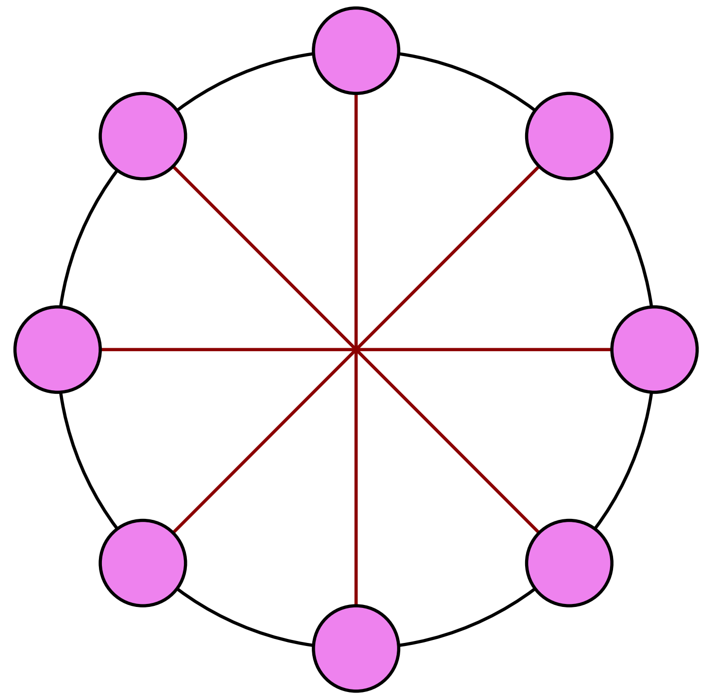
Y además un arbol tiene $n - 1$ aristas

Un algoritmo sencillo:

- Tomar F $\leftarrow$ S
- Mientras exista link e tal que $F - e$ sea factible, eliminar
- Retornar F

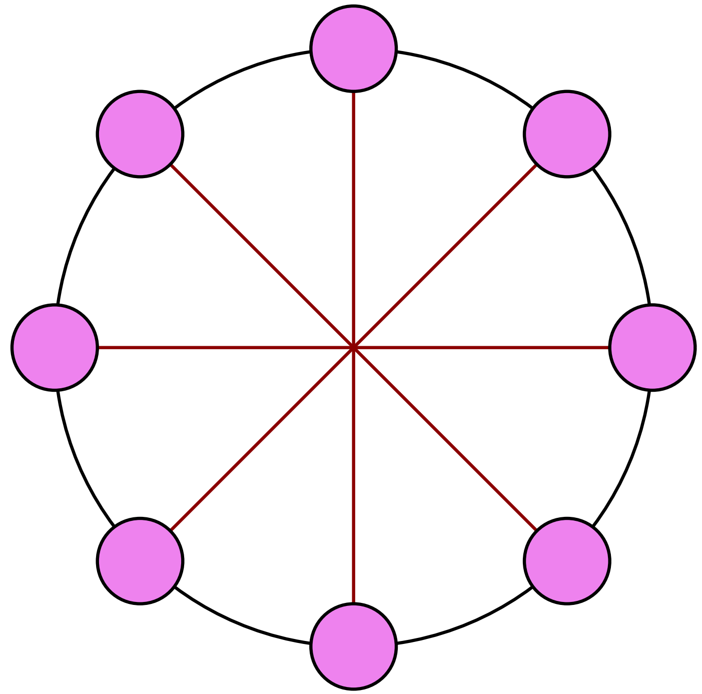
Bajando de 2

Motivación Mejor solución es un matching



Bajando de 2

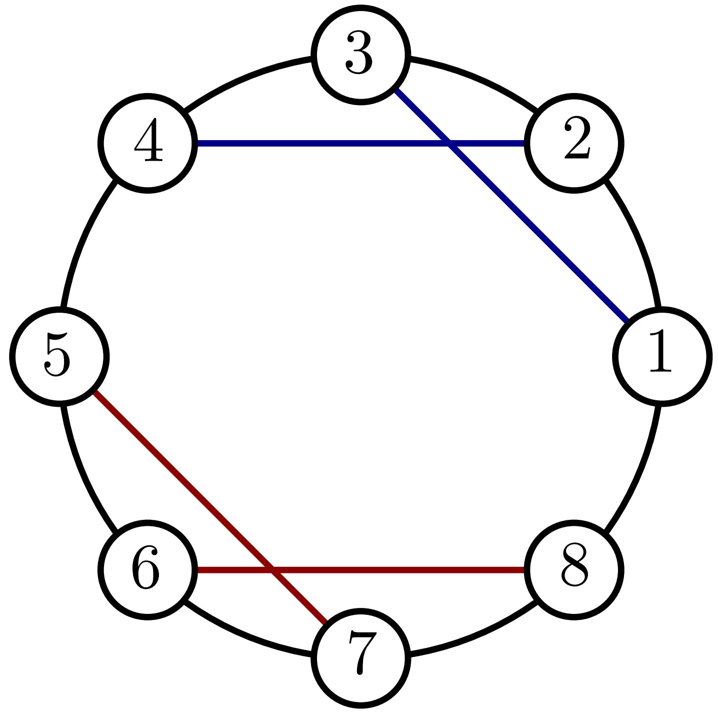
Motivación Mejor solución es un matching



Idea Encontrar conjuntos (de tamaño acotado) que ocupen pocas aristas por vértices

Bajando de 2

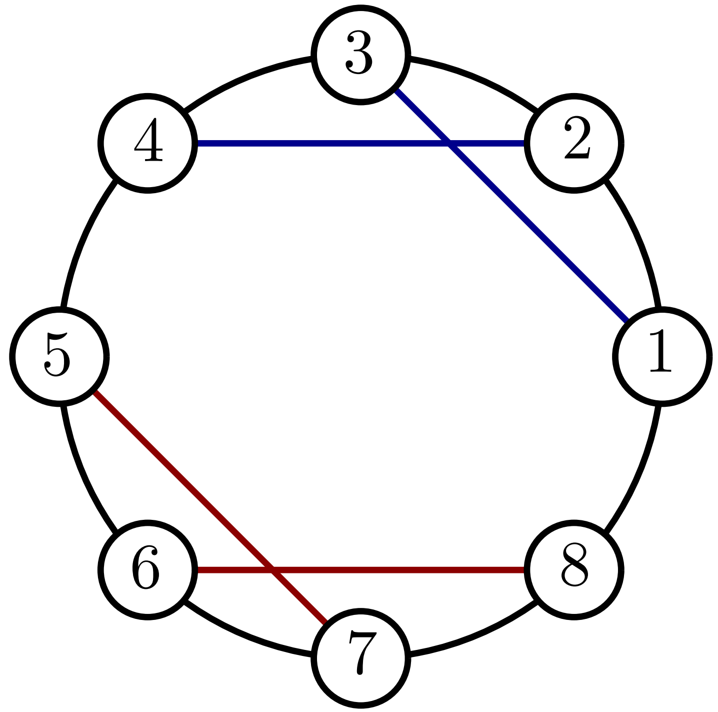
Motivación Mejor solución es un matching



Idea Encontrar conjuntos (de tamaño acotado) que ocupen pocas aristas por vértices

Bajando de 2

Motivación Mejor solución es un matching

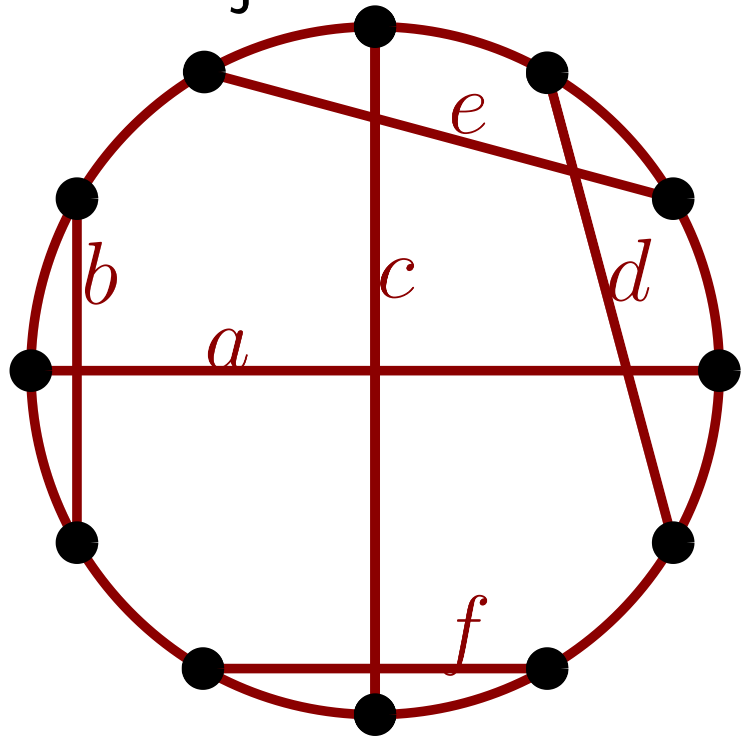


Idea Encontrar conjuntos (de tamaño acotado) que ocupen pocas aristas por vértices

Def Una **componente circular** es un conjunto $L \subseteq S$ de aristas tal que el circle graph correspondiente es conexo.

Bajando de 2

Motivación Mejor solución es un matching

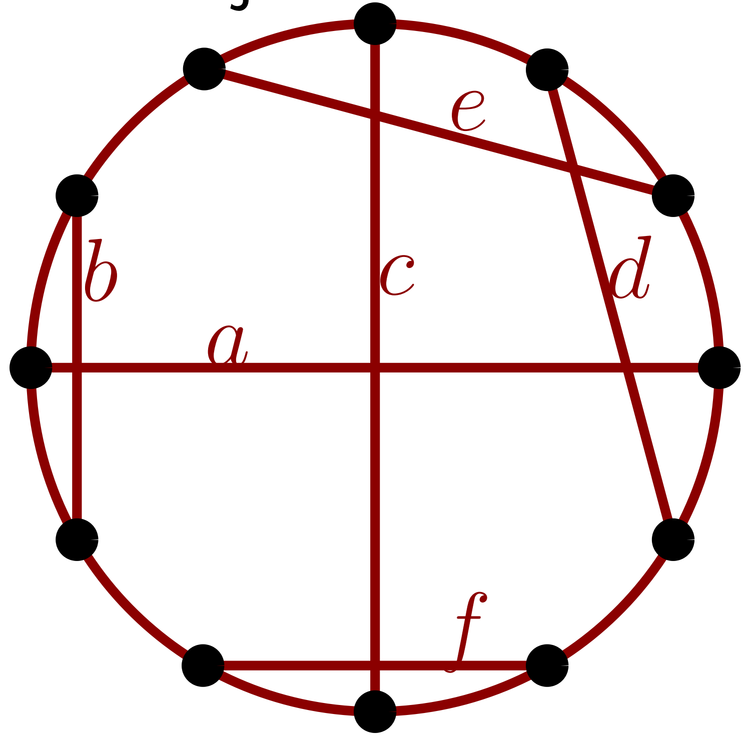


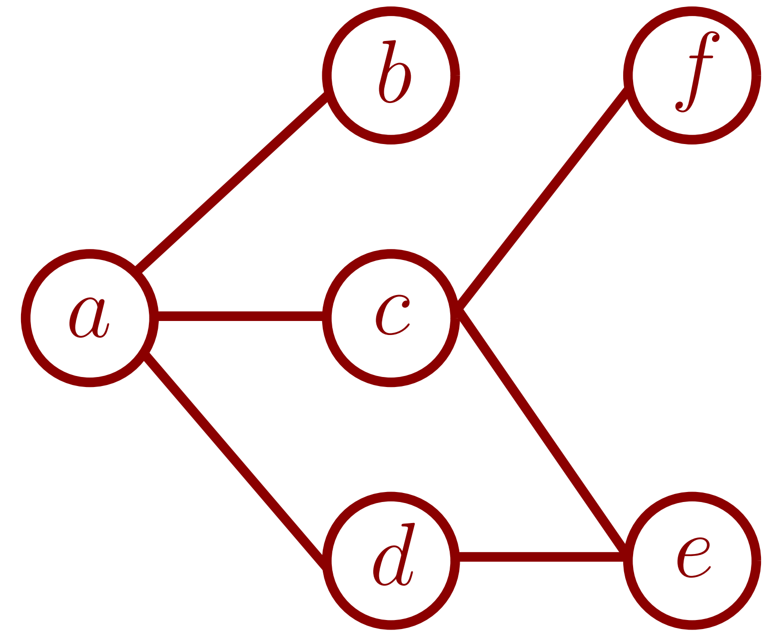
Idea Encontrar conjuntos (de tamaño acotado) que ocupen pocas aristas por vértices

Def Una **componente circular** es un conjunto $L \subseteq S$ de aristas tal que el circle graph correspondiente es conexo.

Bajando de 2

Motivación Mejor solución es un matching



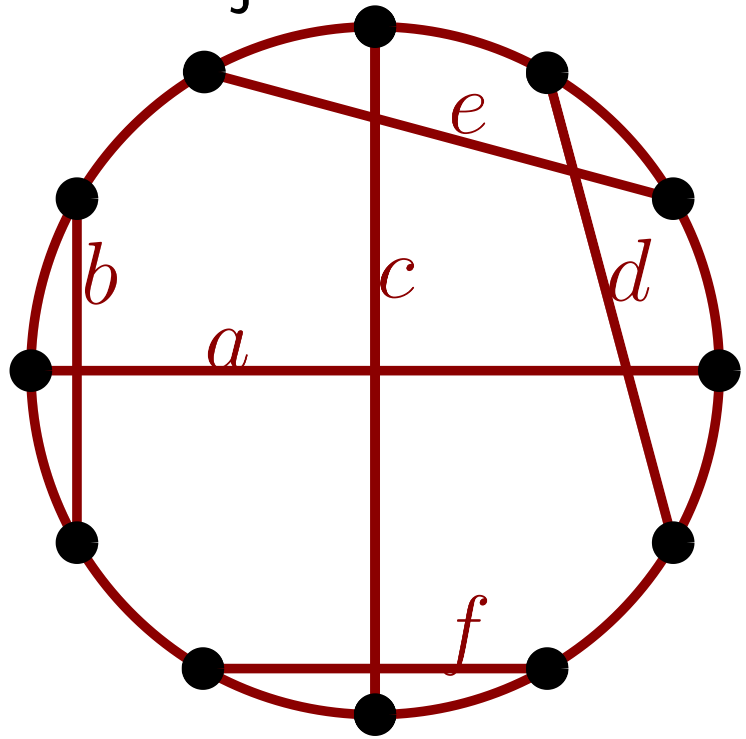


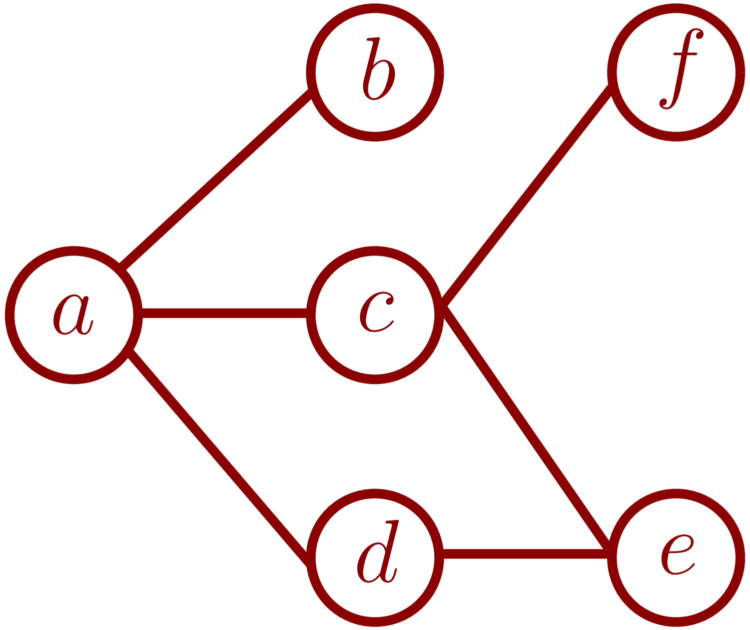
Idea Encontrar conjuntos (de tamaño acotado) que ocupen pocas aristas por vértices

Def Una **componente circular** es un conjunto $L \subseteq S$ de aristas tal que el circle graph correspondiente es conexo.

Bajando de 2

Motivación Mejor solución es un matching





Idea Encontrar conjuntos (de tamaño acotado) que ocupen pocas aristas por vértices

Def Una **componente circular** es un conjunto $L \subseteq S$ de aristas tal que el circle graph correspondiente es conexo.

Teo Si L es edge cover de C_n, L solución al problema ssi es una componente.

Estructura de la tesis

ALG: (1) Construir conjunto de componentes que tengan pocas aristas por vértice
(2) Corregir

Estructura de la tesis

Tamaño de una solución minimal

↓

ALG: (1) Construir conjunto de componentes que tengan pocas aristas por vértice
(2) Corregir

Estructura de la tesis

Tamaño de una solución minimal

$\downarrow$

ALG: (1) Construir conjunto de componentes que tengan pocas aristas por vértice
(2) Corregir

$\downarrow$

Garantías de Aproximación

Estructura de la tesis

Tamaño de una solución minimal

↓

ALG: (1) Construir conjunto de componentes que tengan pocas aristas por vértice
(2) Corregir

↓

Garantías de Aproximación

↓

Algoritmo Refinado

Estructura de la tesis

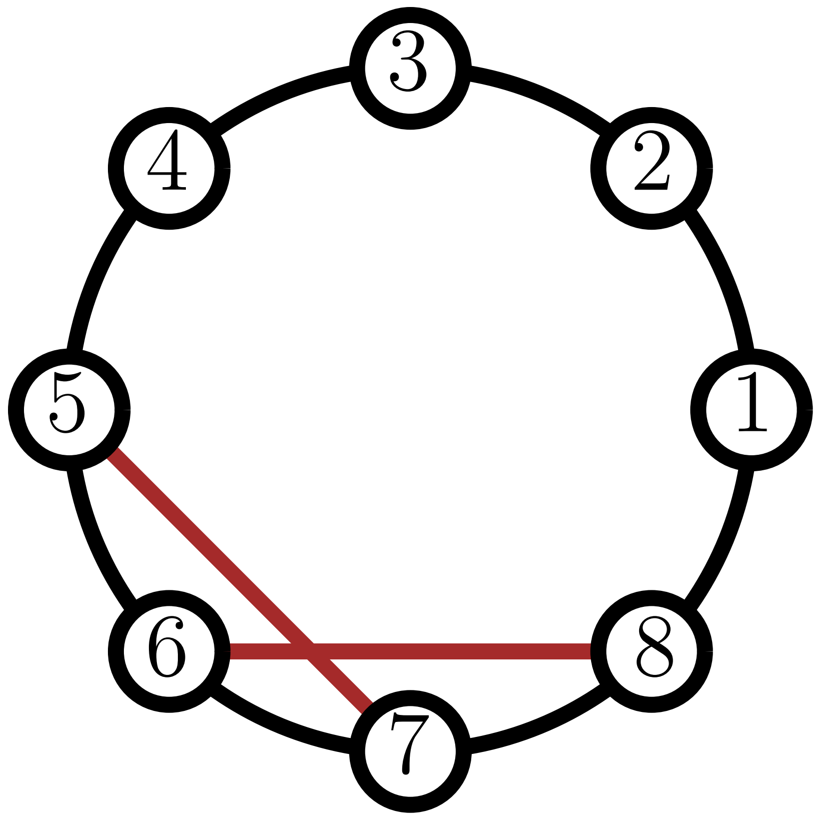
Tamaño de una solución minimal

ALG: (1) Construir conjunto de componentes que tengan pocas aristas por vértice
(2) Corregir

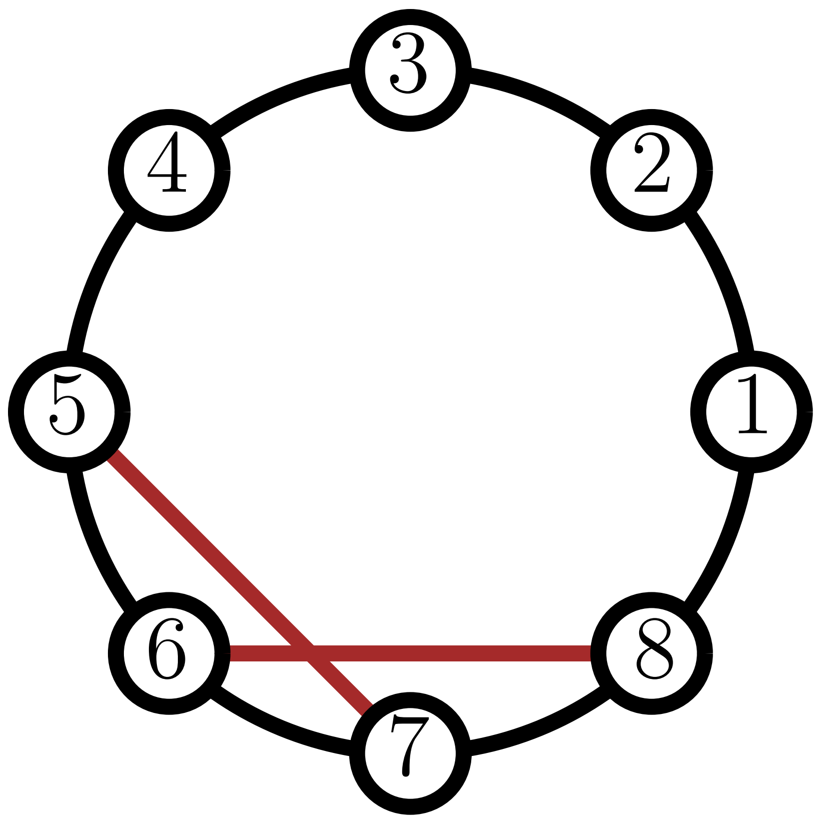
Garantías de Aproximación

Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible

Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible

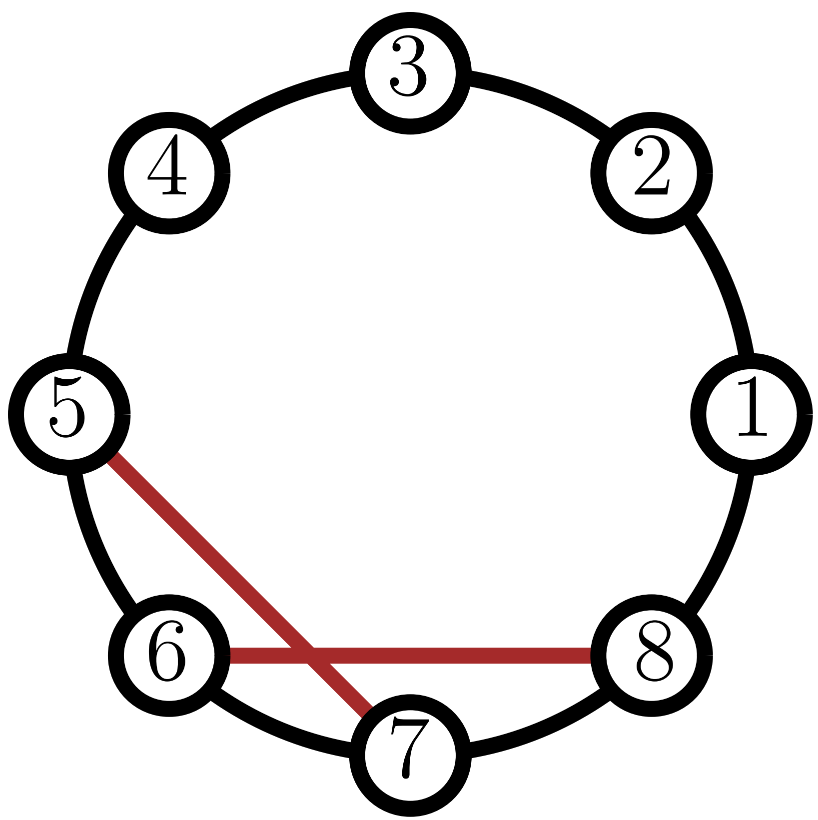


Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible



Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

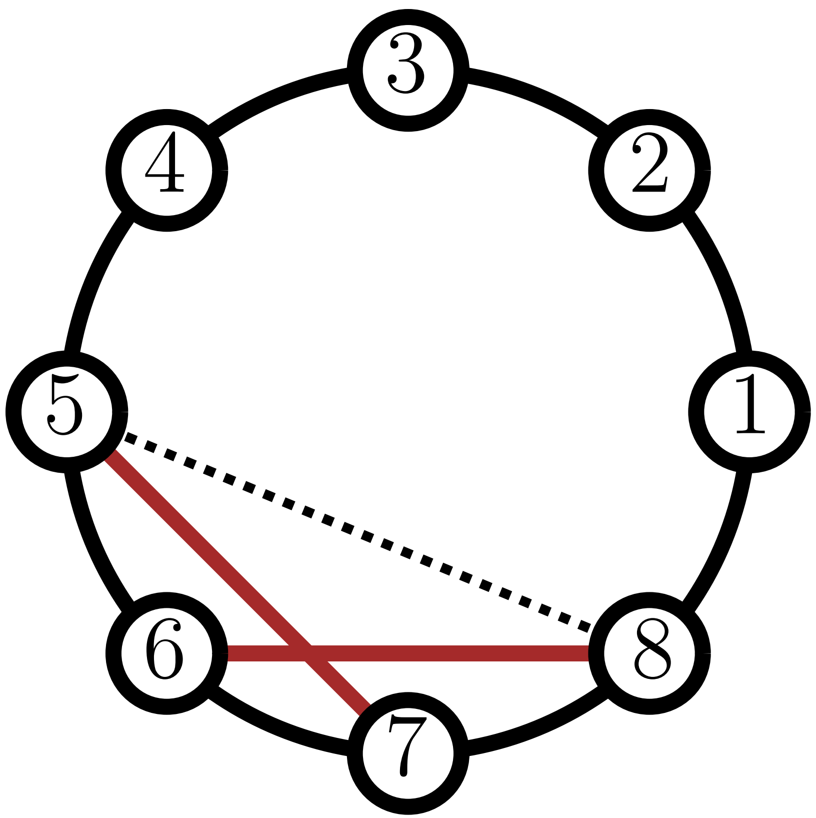
Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible



Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

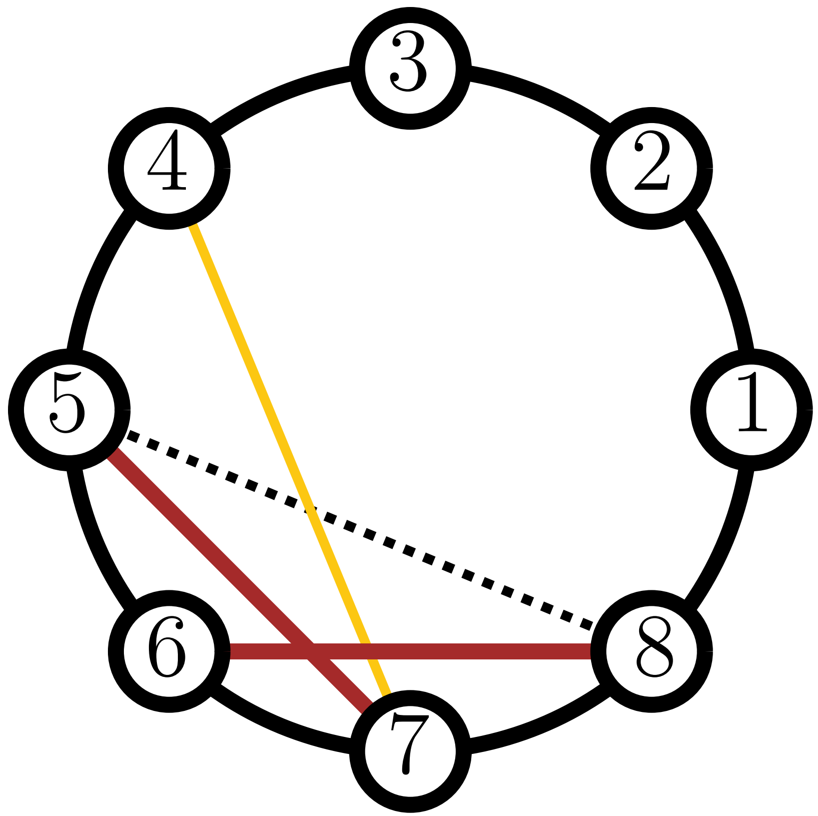
Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible



Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

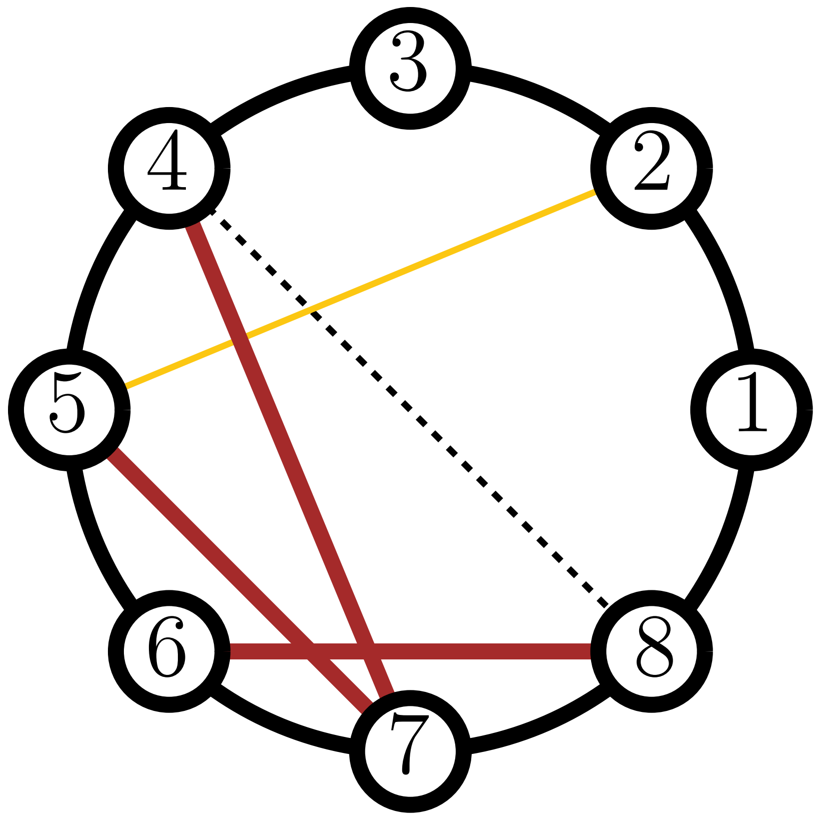
Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible



Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

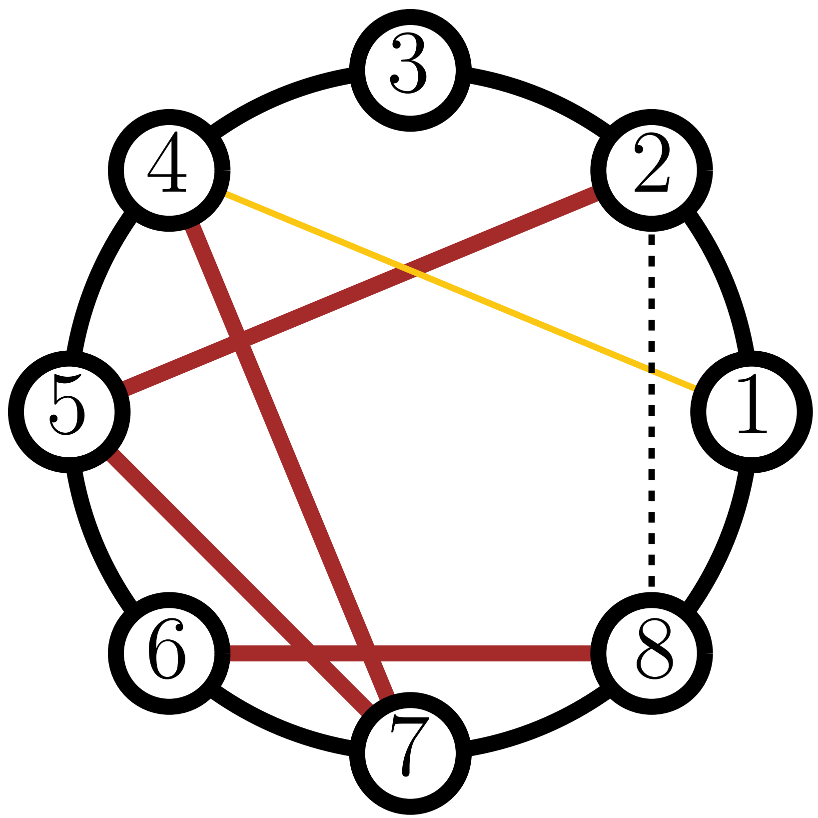
Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible



Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

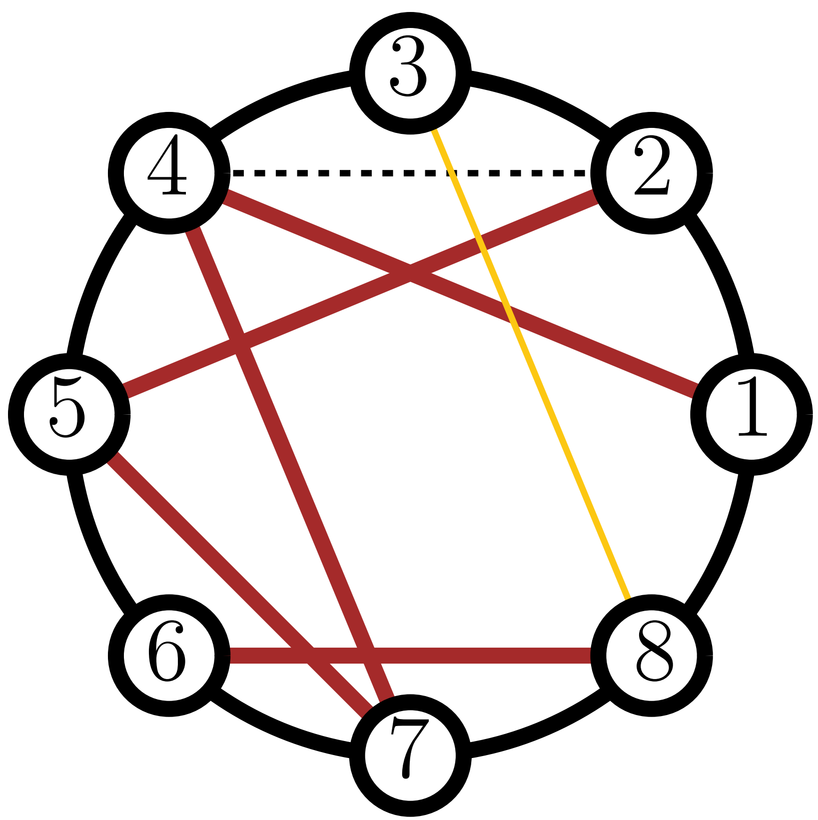
Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible



Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

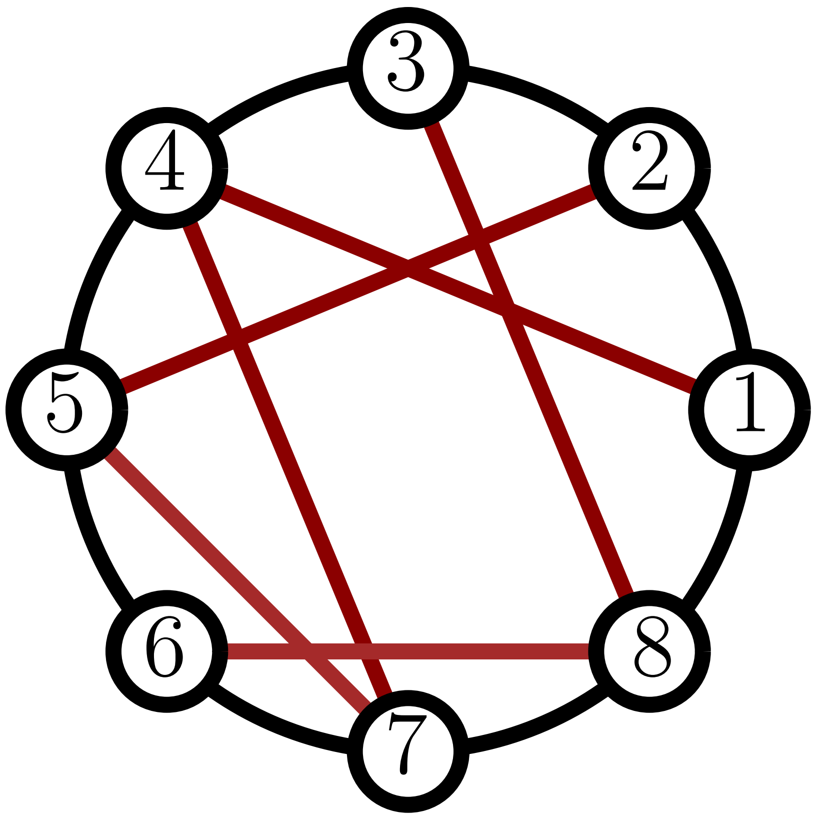
Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible



Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

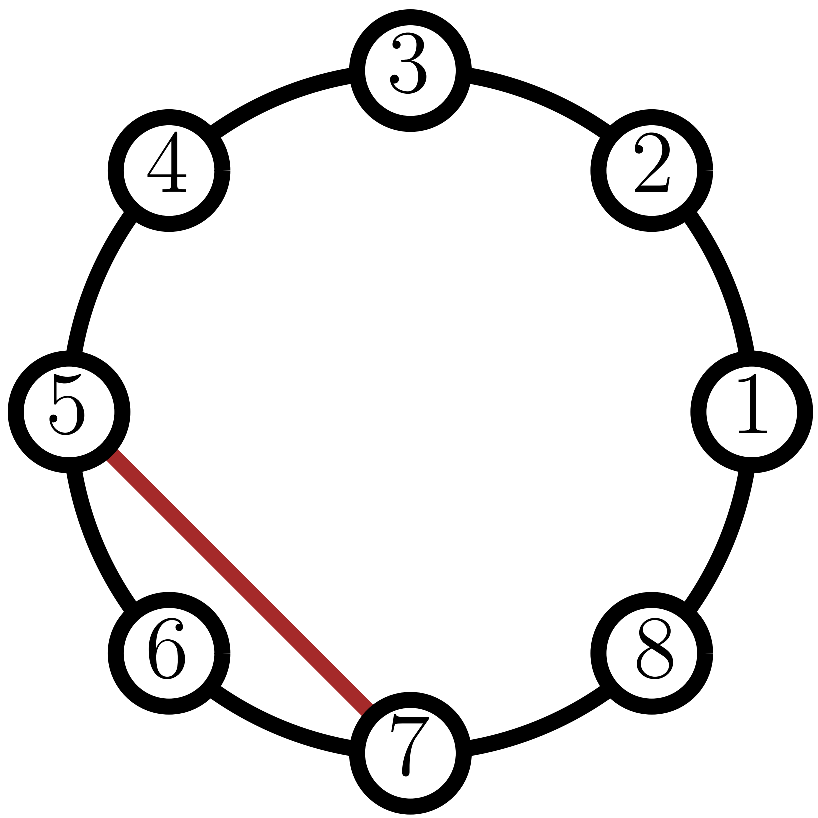
Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible



Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible

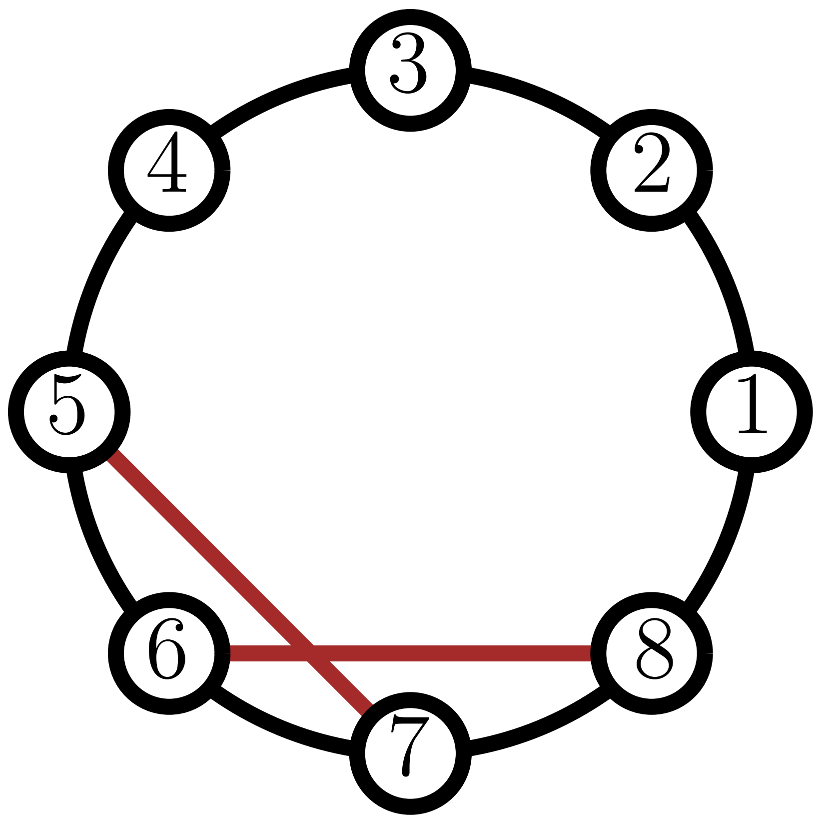


Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

Corolario Una completación minimal de una arista e tiene a lo más $n - 3$ aristas

Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible

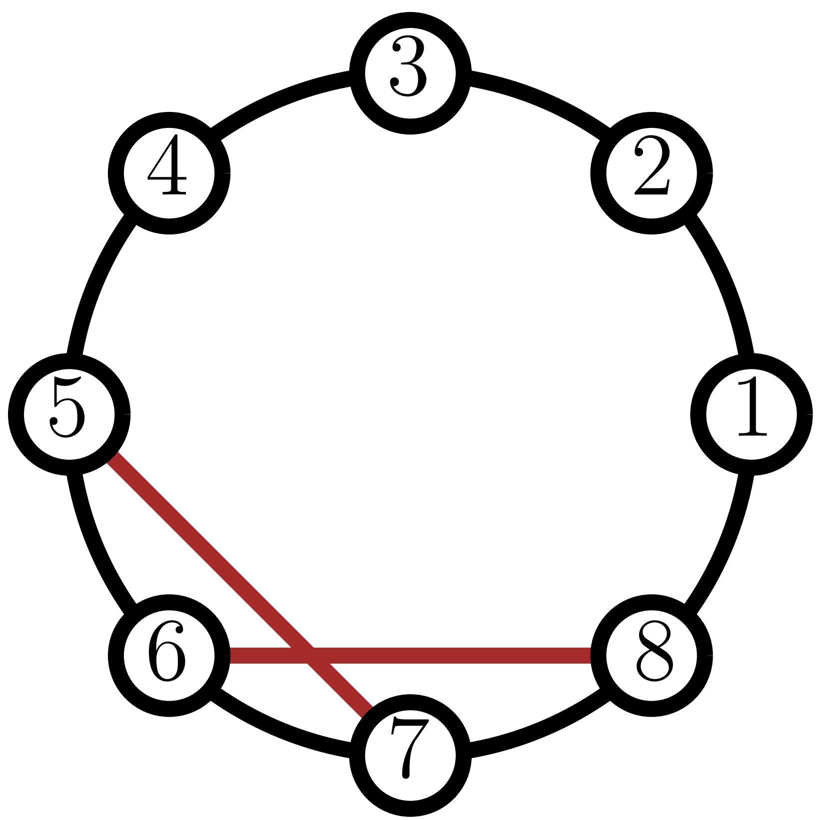


Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

Corolario Una completación minimal de una arista e tiene a lo más $n - 3$ aristas

Def Una completación de F es un conjunto $Q \subset S$ tal que $F \cup Q$ es factible

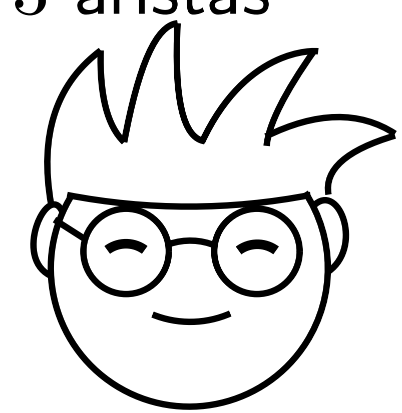


Una completación minimal de una componente circular L tiene a lo más $n - |V(L)|$ aristas

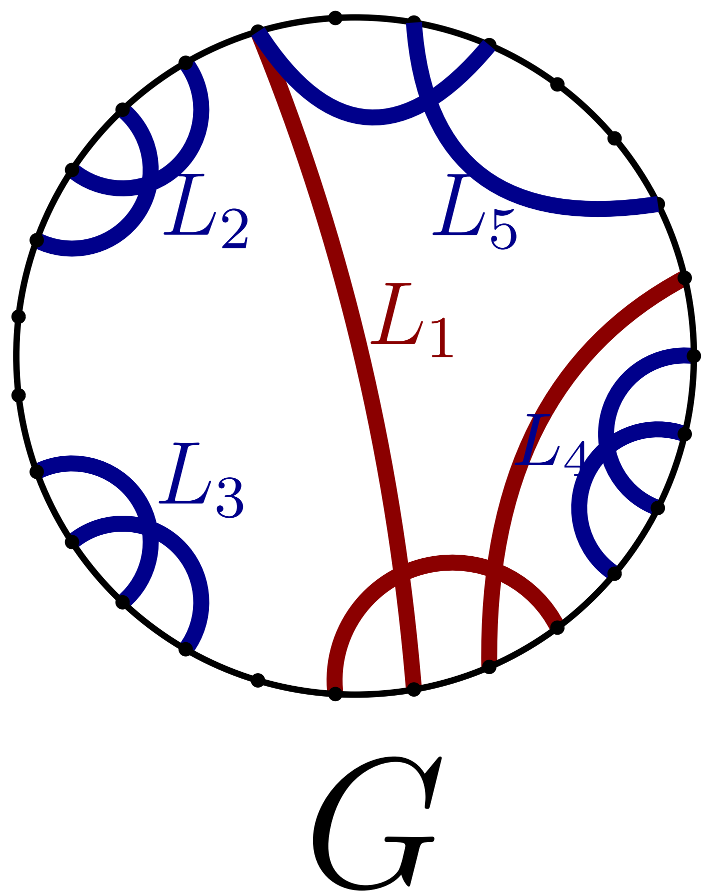
Dem: Inducción en $i = n - |V(L)|$

Corolario Una completación minimal de una arista e tiene a lo más $n - 3$ aristas

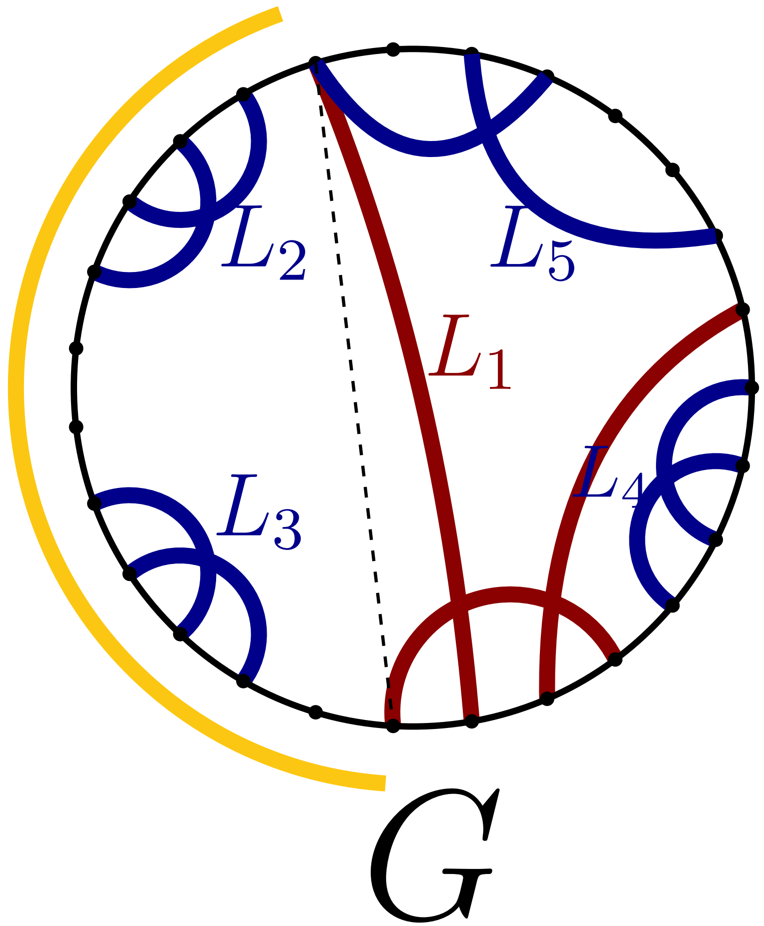
$$1 + (n - 4) = n - 3$$

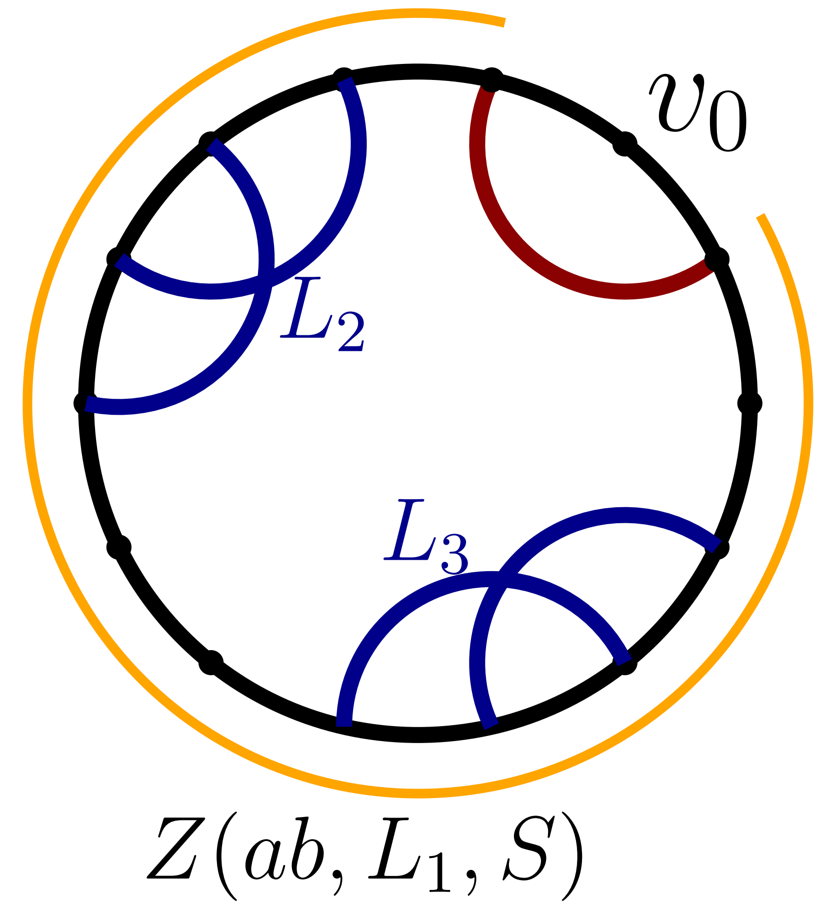


Def Grafo de zona

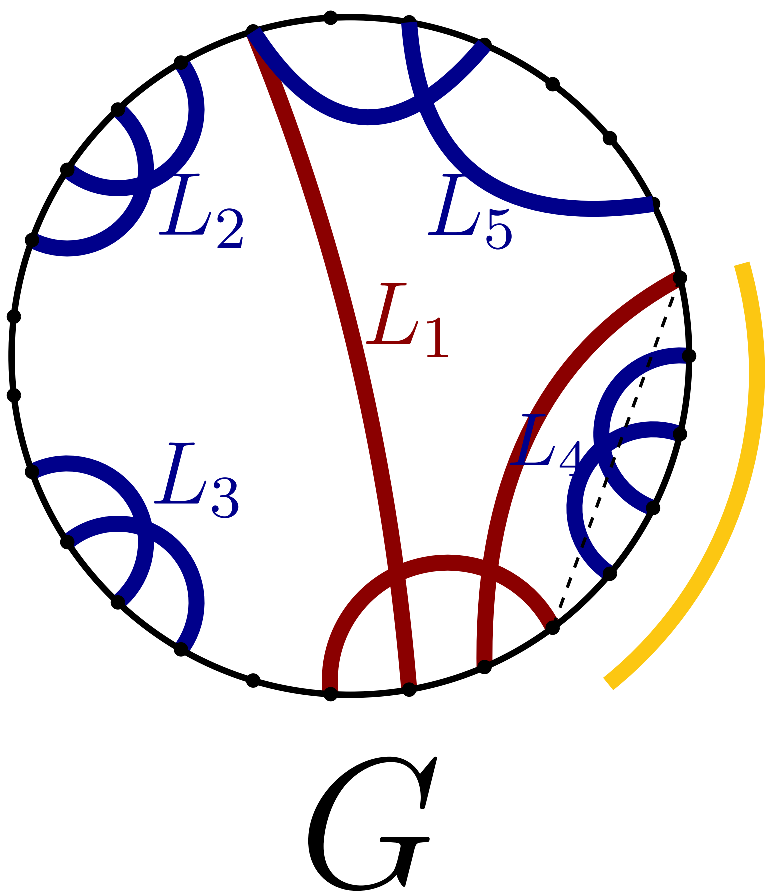


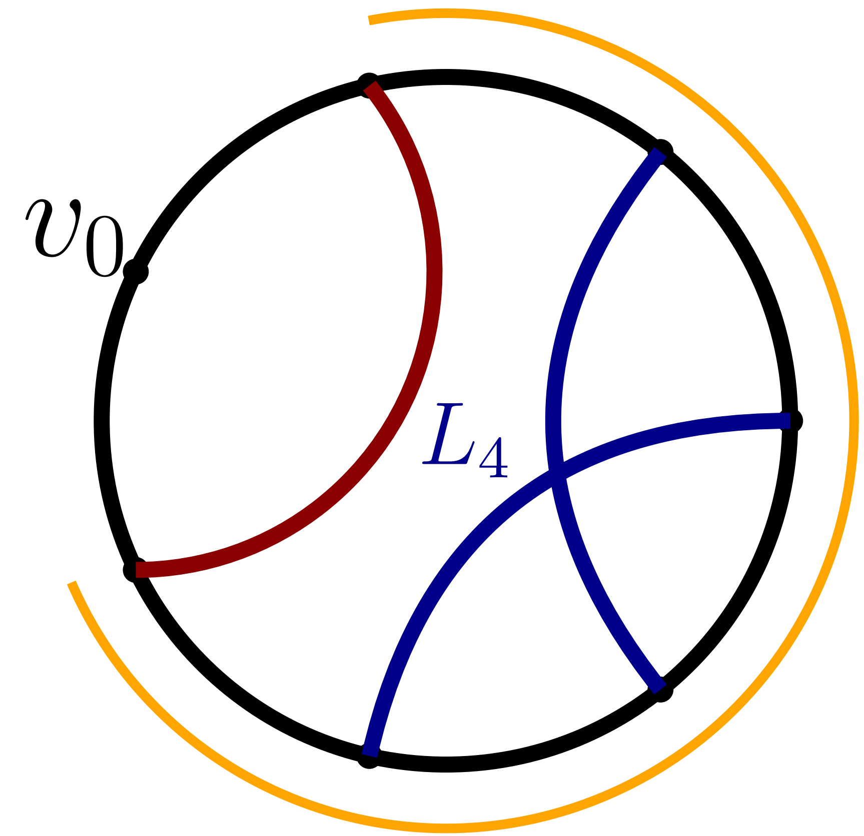
Def Grafo de zona



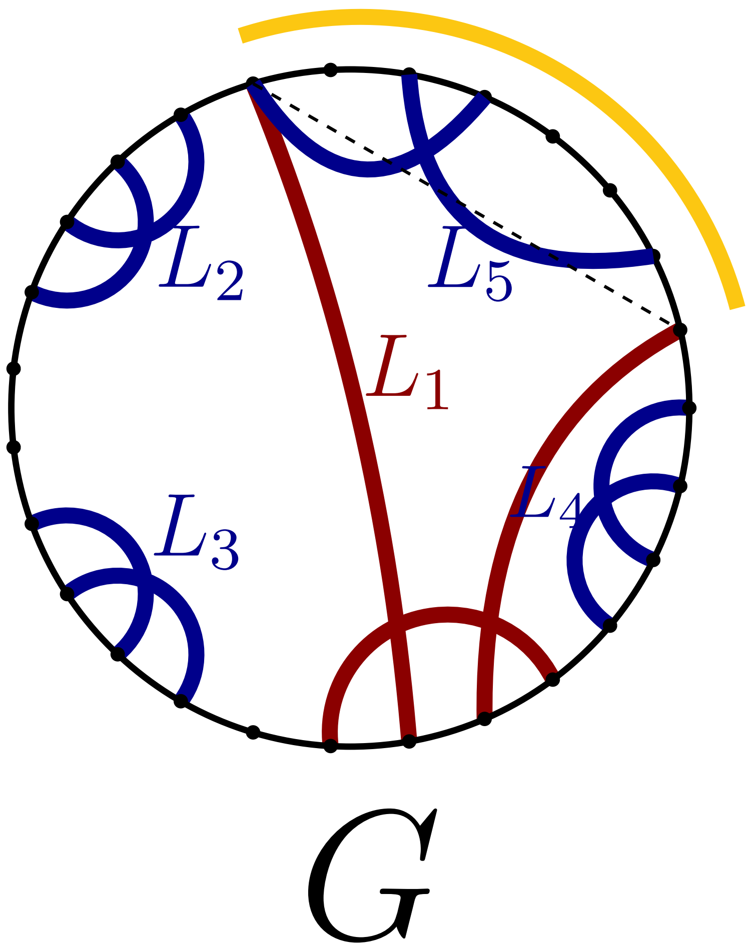


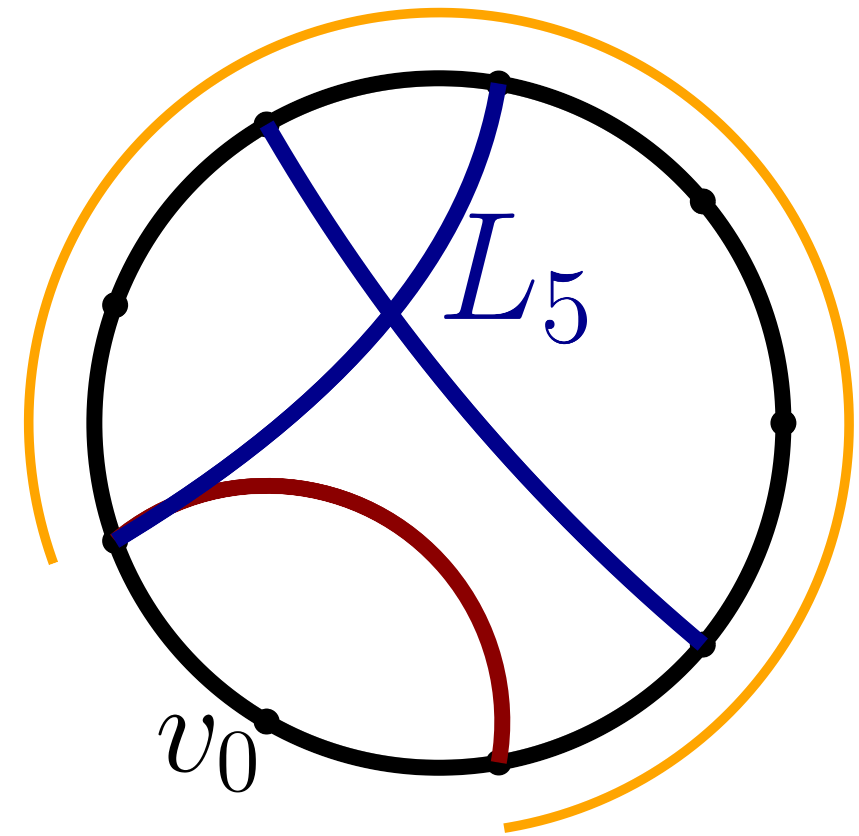
Def Grafo de zona



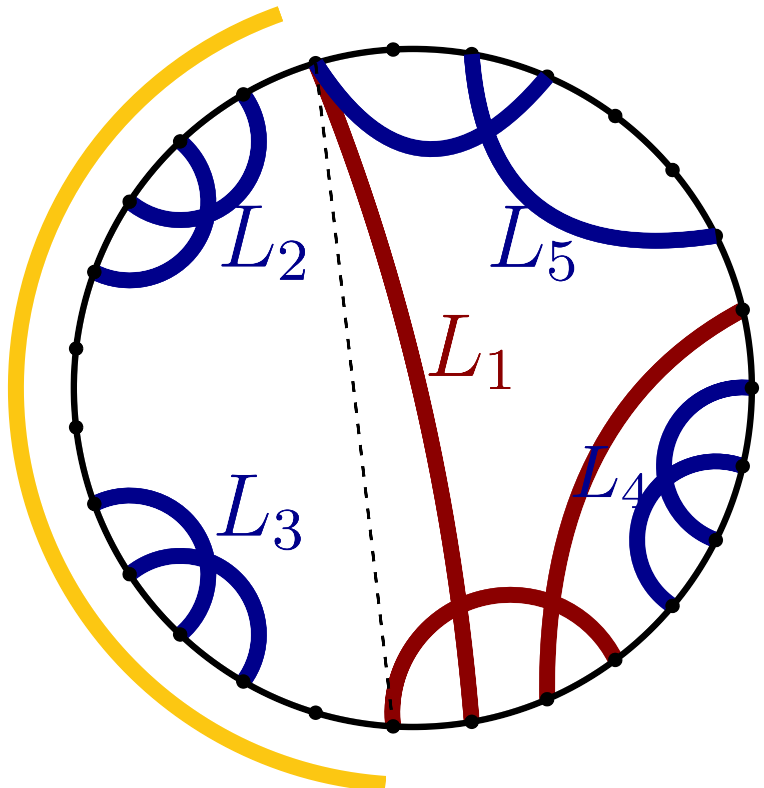


Def Grafo de zona

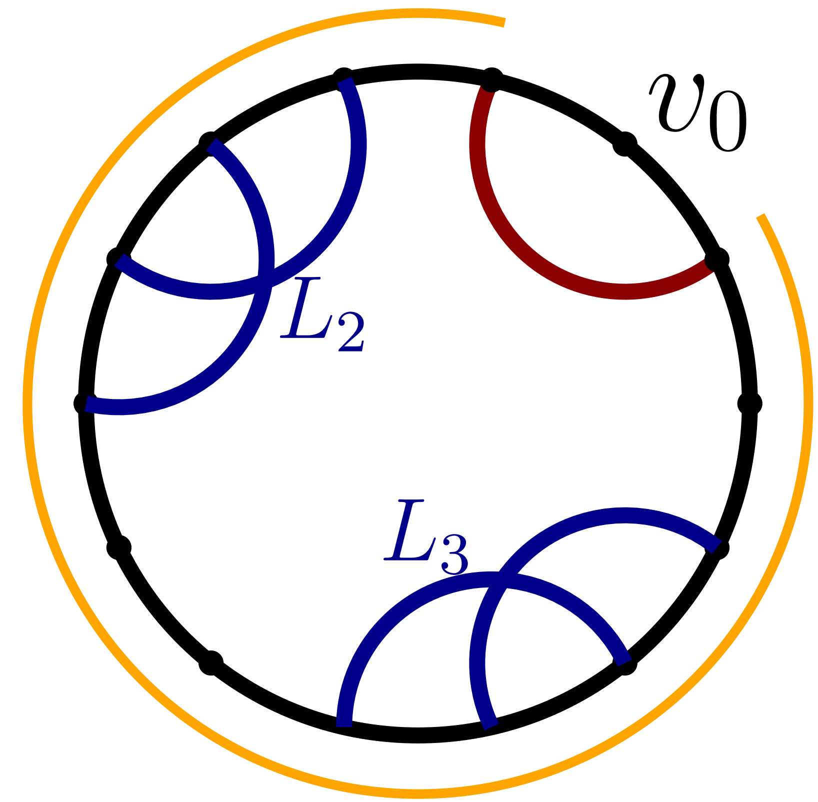




Def Grafo de zona

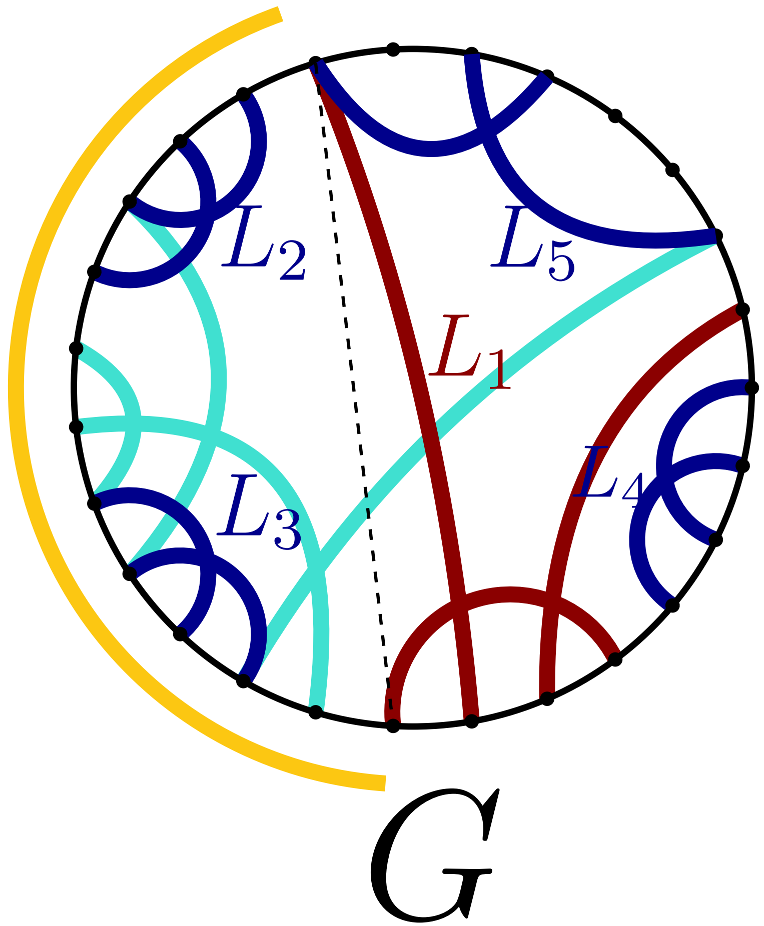


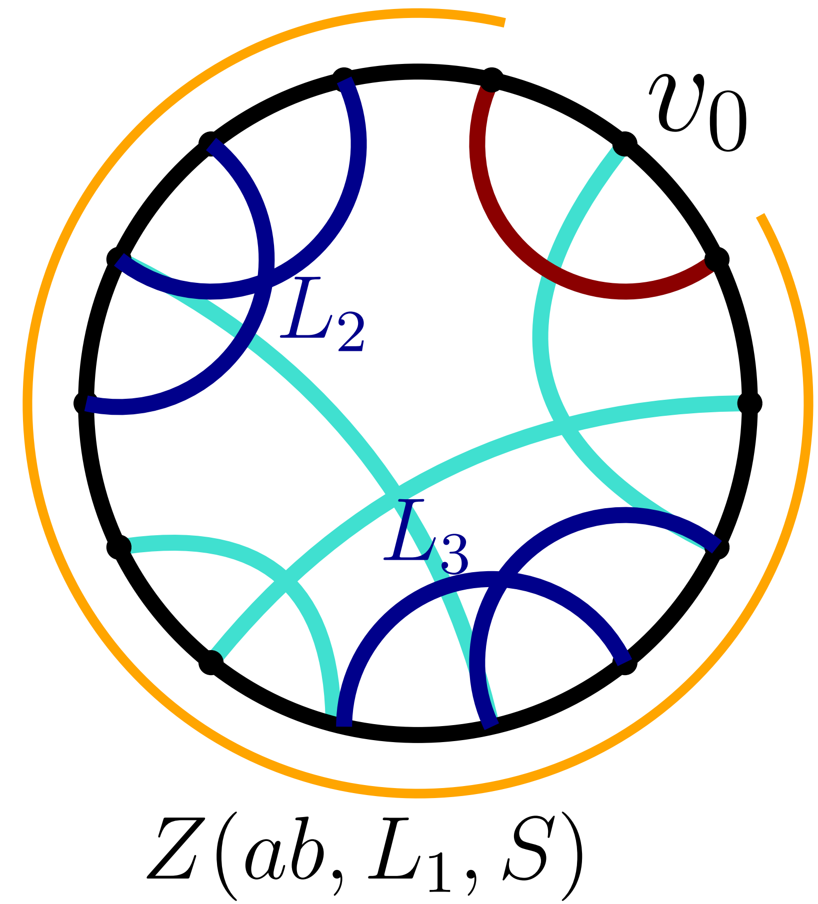
G



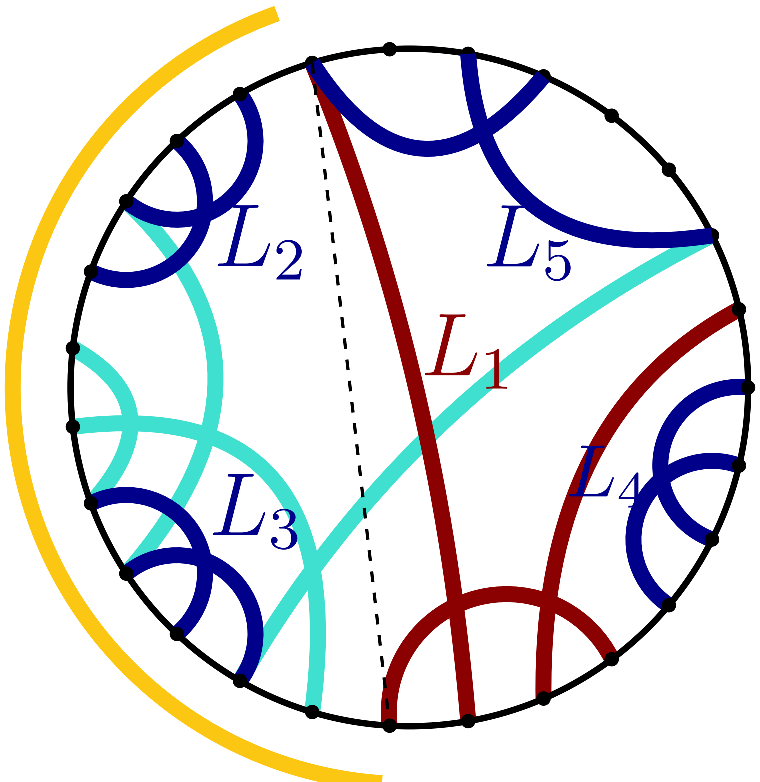
$Z(ab, L_1, S)$

Def Grafo de zona

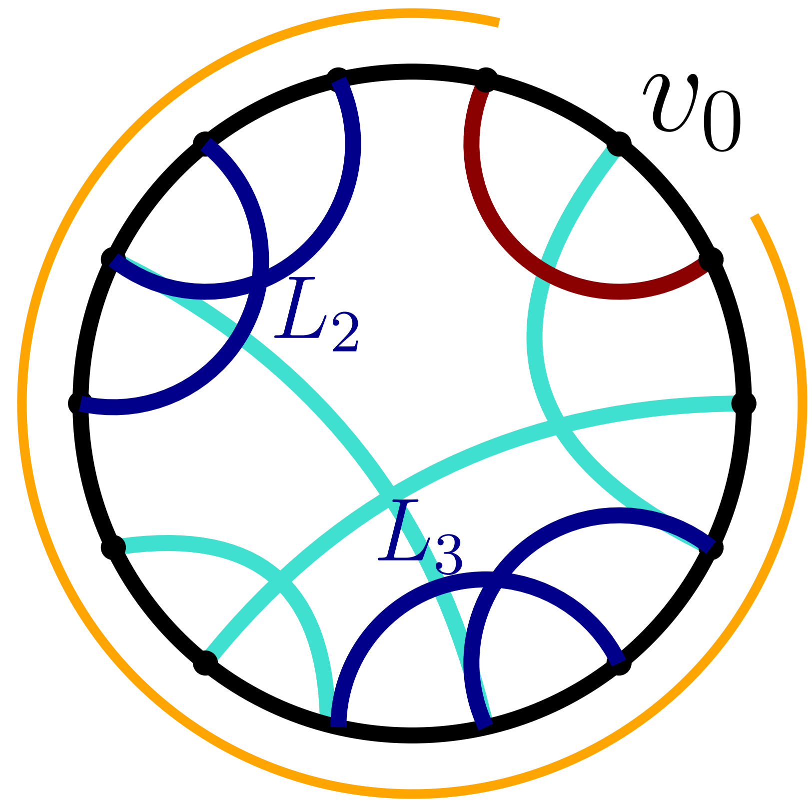




Def Grafo de zona



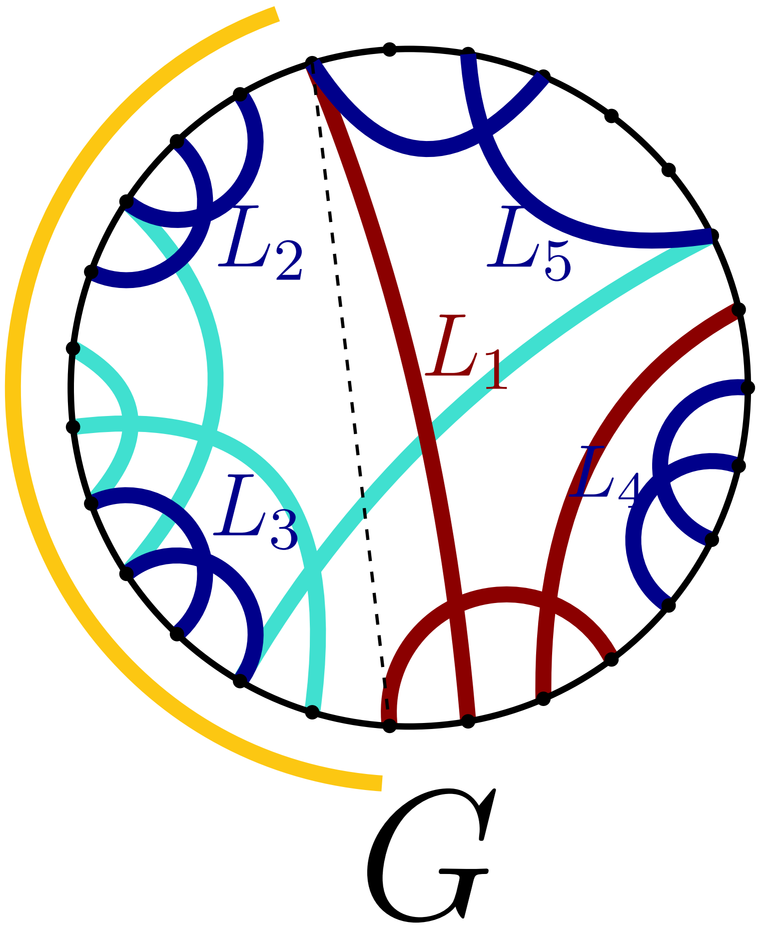
G

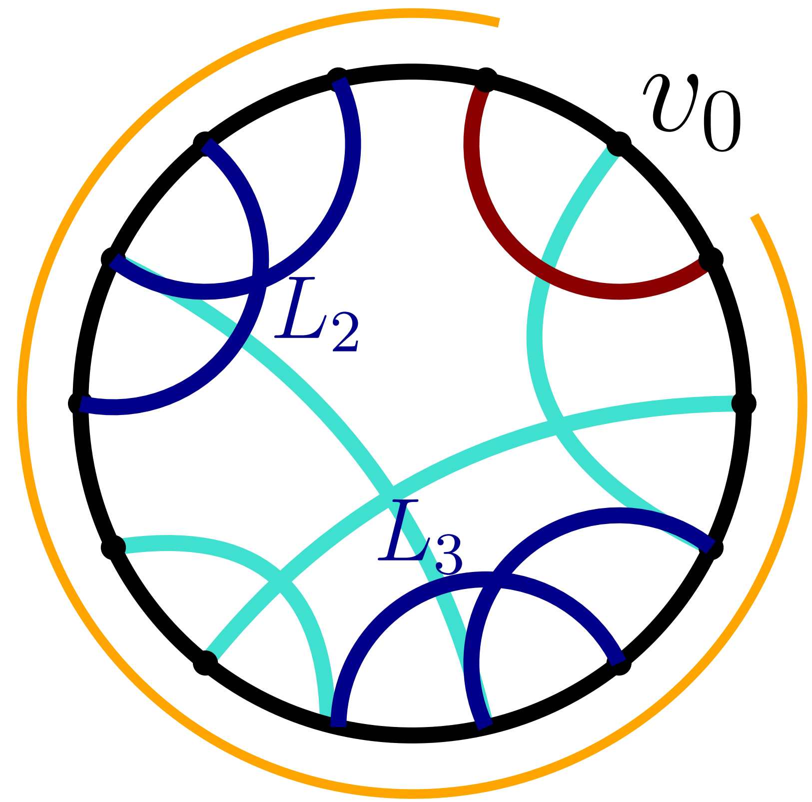


$Z(ab, L_1, S)$

Teorema: $L_1, \ldots, L_k$ una colección de k componentes circulares, $F = L_1 \cup \cdots \cup L_k$. Toda completación minimal Q de F tiene a lo más $n - \sum(|V(L_i)| - 3) - 3$ aristas

Def Grafo de zona





Teorema: $L_1, \ldots, L_k$ una colección de k componentes circulares, $F = L_1 \cup \cdots \cup L_k$. Toda completación minimal Q de F tiene a lo más $n - \sum |V(L_i)| + 3k - 3$ aristas

Demostración

Inducción en n

Demostración

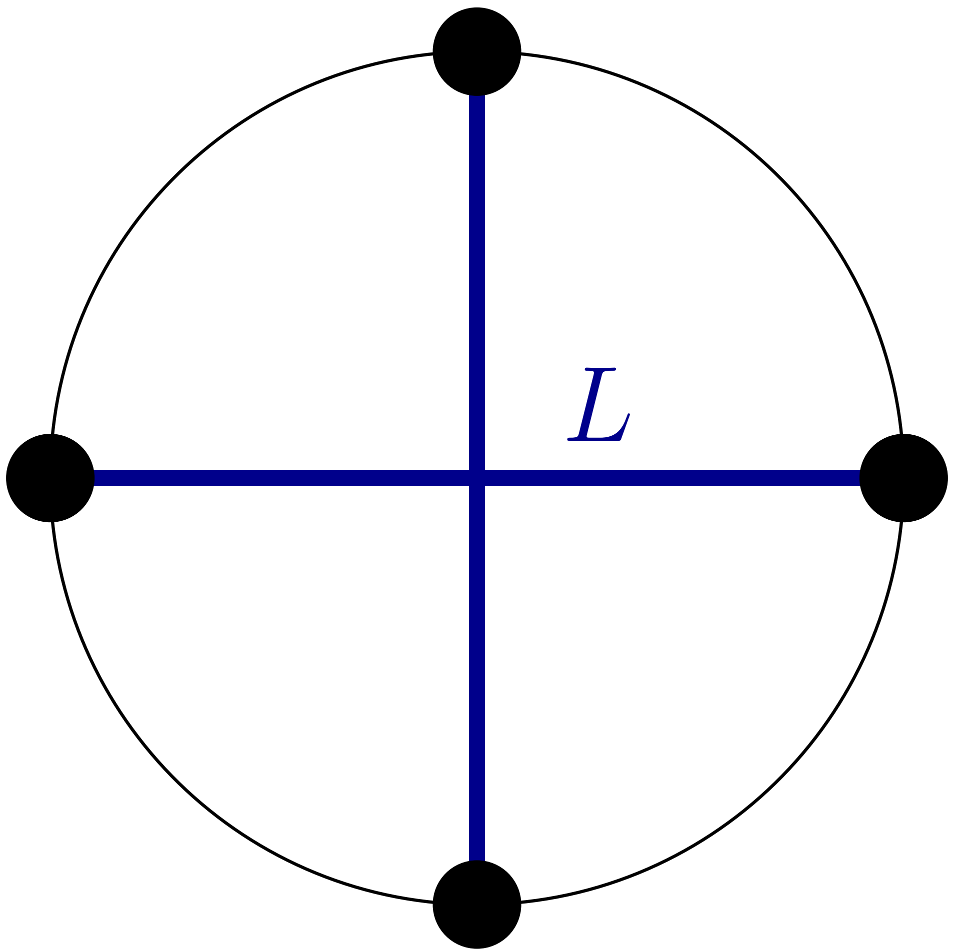
Inducción en n

Caso base, n=4

Demostración

Inducción en n

Caso base, n=4



Demostración

Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Demostración

Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Paso inductivo, Q completación minimal de F

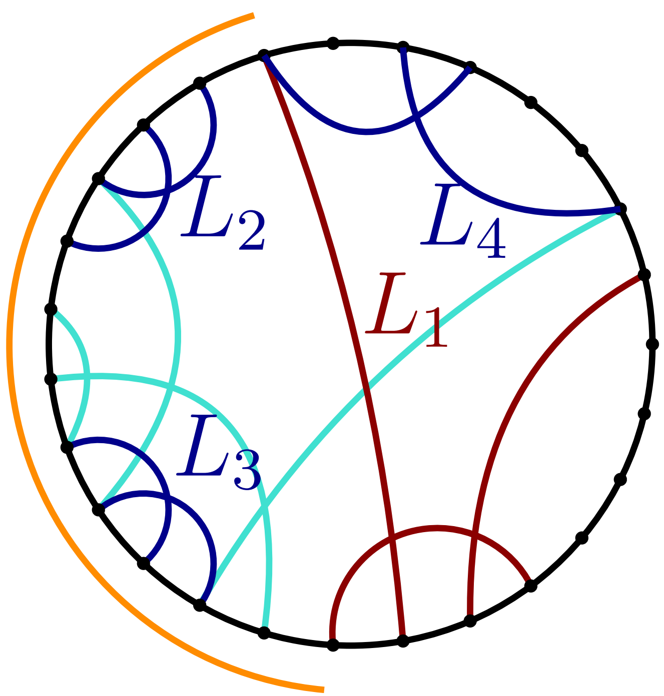
Demostración

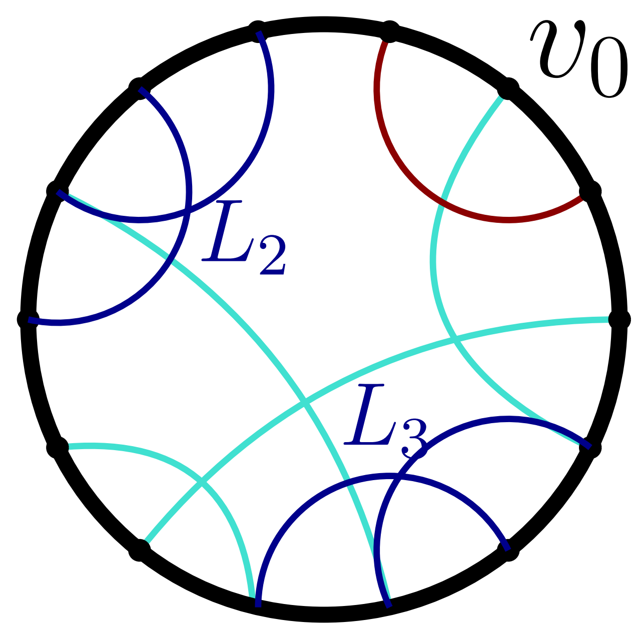
Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Paso inductivo, Q completación minimal de F

Caso 1:





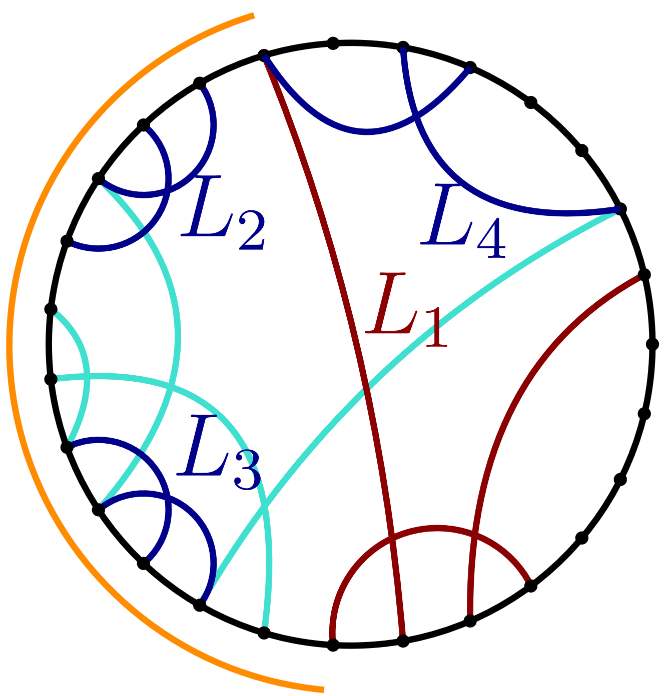
Demostración

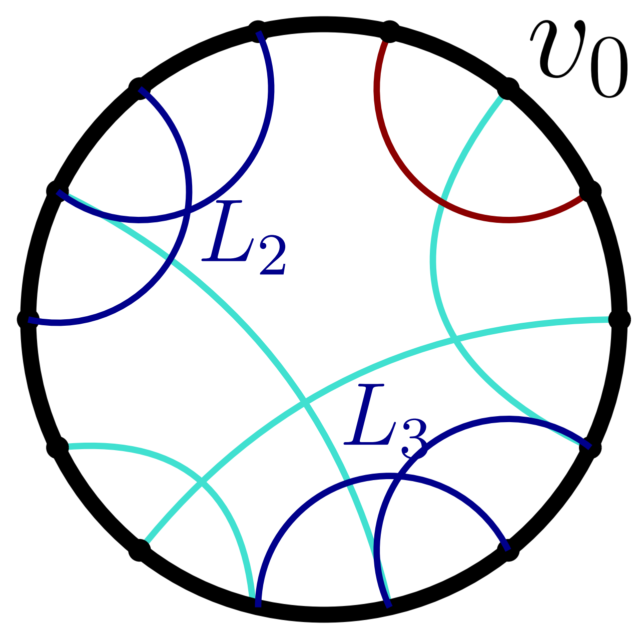
Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Paso inductivo, Q completación minimal de F

Caso 1:





$$|Q'_{ab}| \leq n_{ab} - 3 - \sum_{J \in \mathcal{L}(ab, L_1)} (|V(J)| - 3)$$

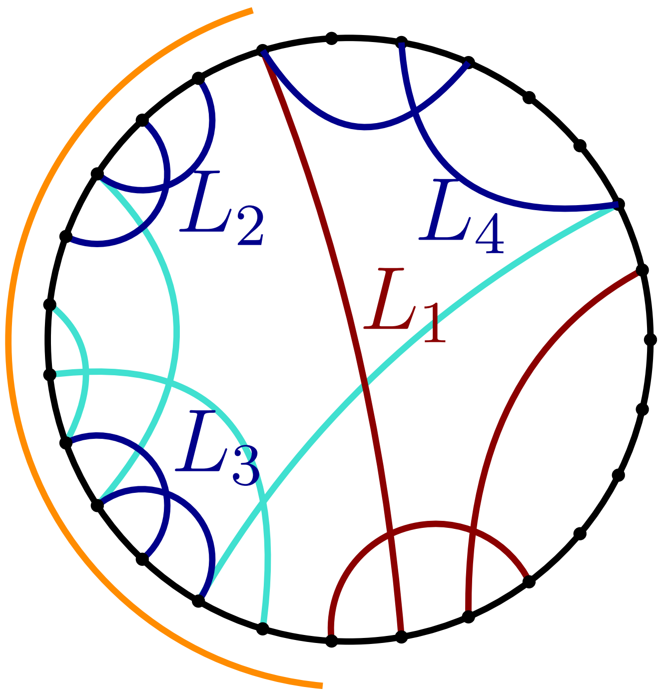
Demostración

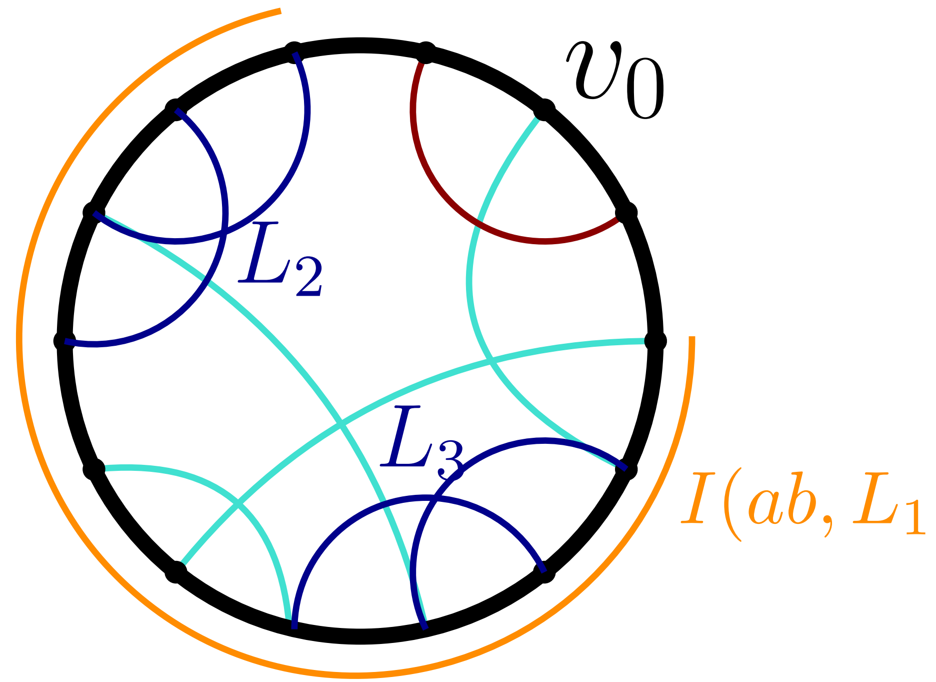
Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Paso inductivo, Q completación minimal de F

Caso 1:





$$|Q'_{ab}| \leq n_{ab} - 3 - \sum_{J \in \mathcal{L}(ab,L_1)} (|V(J)| - 3)$$

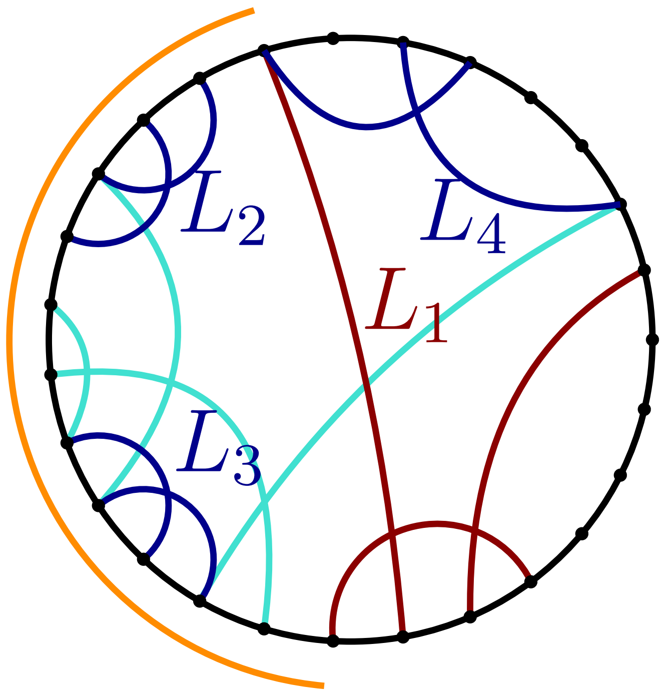
Demostración

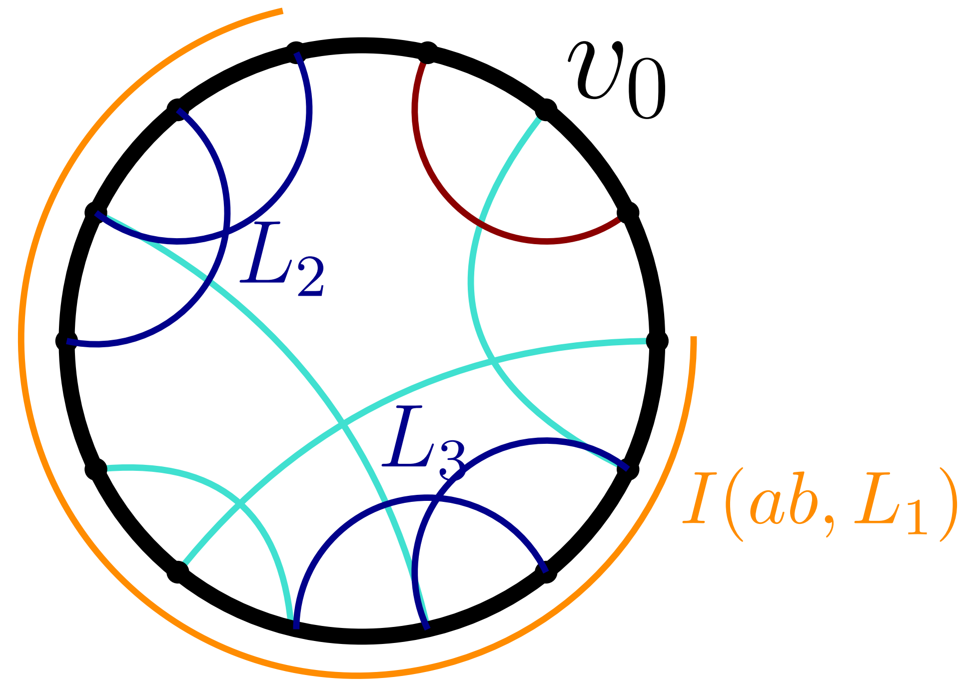
Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Paso inductivo, Q completación minimal de F

Caso 1:





$$|Q'_{ab}| \leq |I(ab, L_1)| - \sum_{J \in \mathcal{L}(ab, L_1)} (|V(J)| - 3)$$

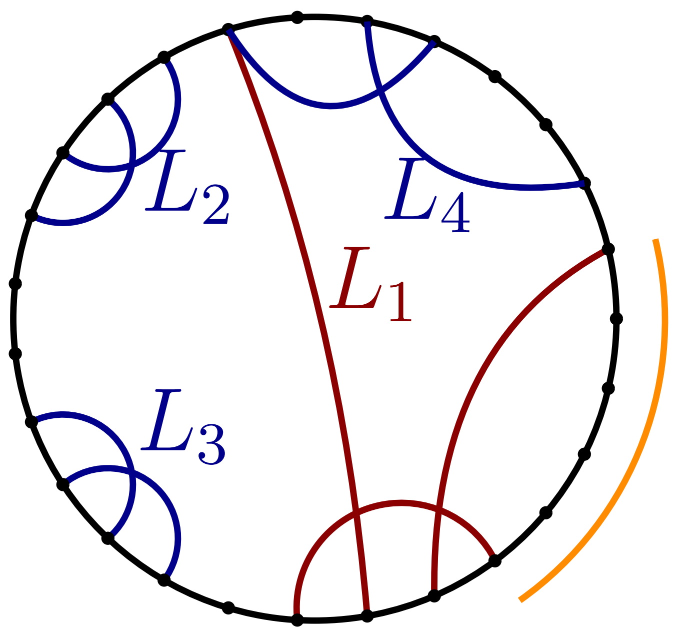
Demostración

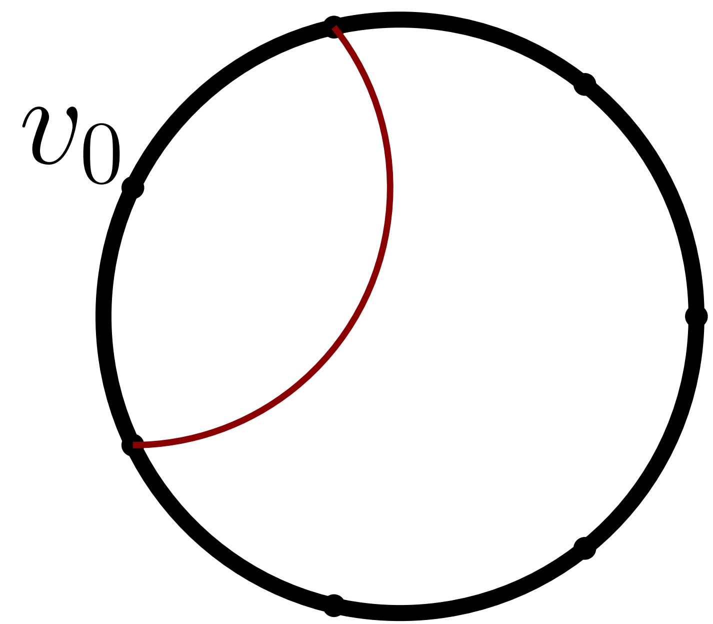
Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Paso inductivo, Q completación minimal de F

Caso 2:





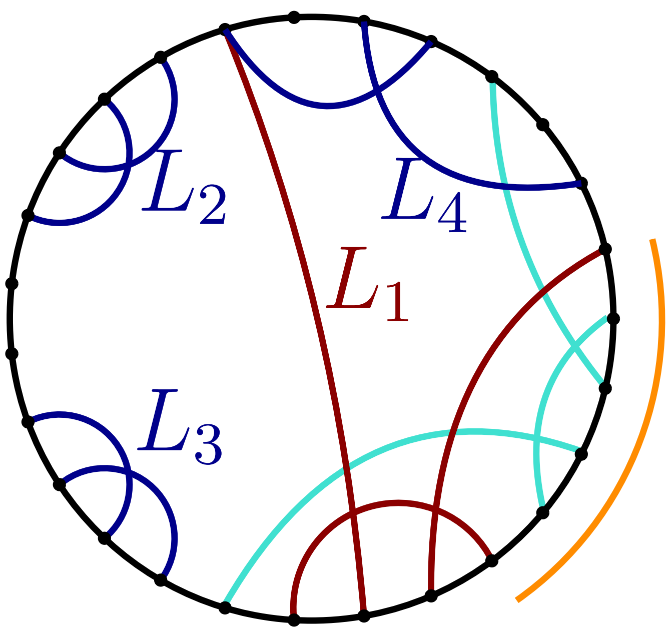
Demostración

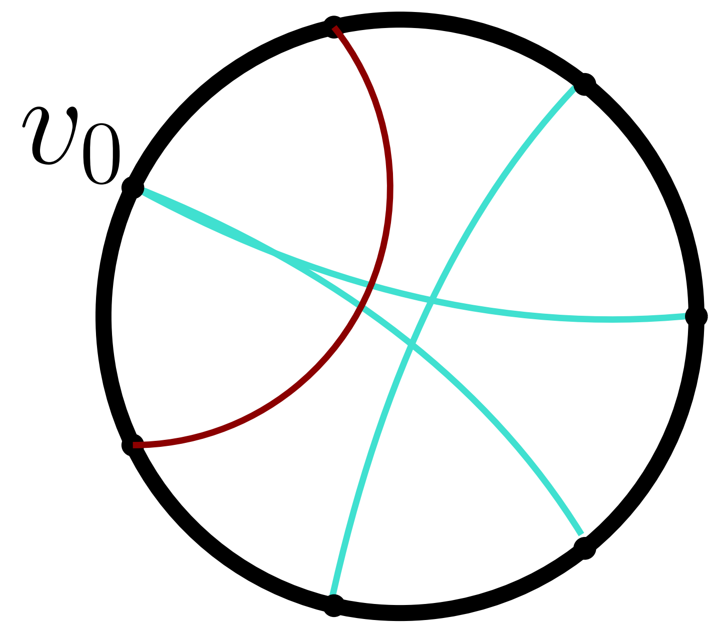
Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Paso inductivo, Q completación minimal de F

Caso 2:





$$|Q'_{ab}| \leq n_{ab} - 3 = |I(ab, L_1)|$$

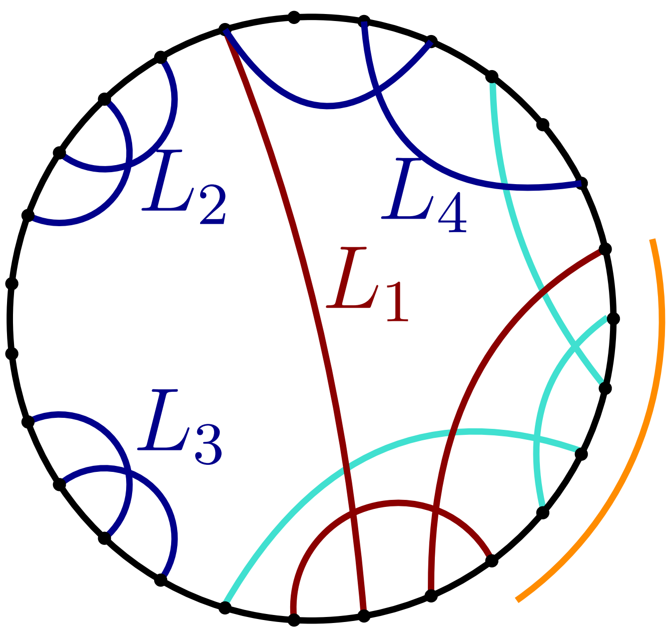
Demostración

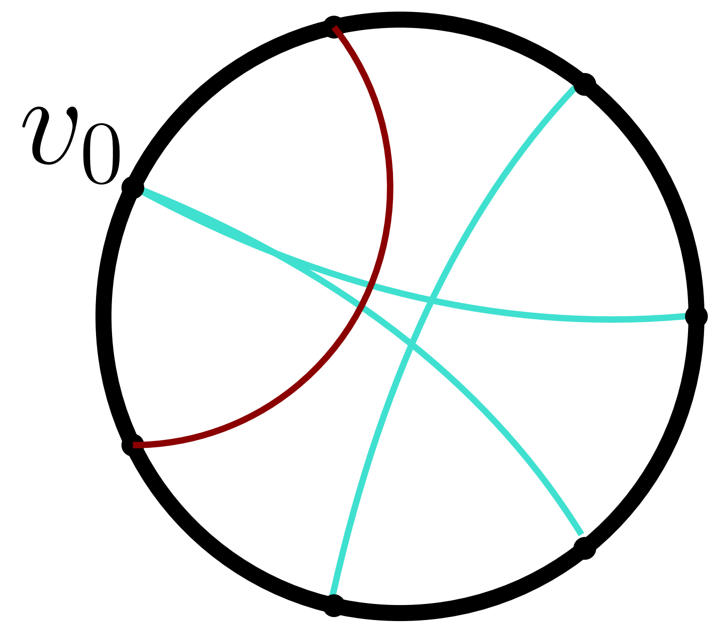
Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Paso inductivo, Q completación minimal de F

Caso 2:





$|Q'_{ab}| \leq n_{ab} - 3 = |I(ab, L_1)|$

$|Q'_{ab}| \leq |I(ab, L_1)| - \sum_{J \in \mathcal{L}(ab, L_1)} (|V(J)| - 3)$

Demostración

Inducción en n

Caso base, n=4 $\checkmark$

Paso inductivo, Q completación minimal de F $\checkmark$

$Q' = \bigcup_{ab \in P(L_1)} Q'_{ab}$ es una completación de F en la instancia original y $Q' \subseteq Q$

Demostración

Inducción en n

Caso base, n=4 ✓

Paso inductivo, Q completación minimal de F ✓

$Q' = \bigcup_{ab \in P(L_1)} Q'_{ab}$ es una completación de F en la instancia original y $Q' \subseteq Q$

$$
\begin{aligned}
|Q| &\leq \sum_{ab \in P(L_1)} |Q'_{ab}| \\
&\leq \sum_{ab \in P(L_1)} \Big(|I(ab, L_1)| - \sum_{J \in \mathcal{L}(ab, L_1)} (|V(J)| - 3) \Big). \\
&= (n - |V(L_1)|) - \sum_{J \in \mathcal{L} \setminus \{L_1\}} (|V(J)| - 3) \\
&= n - 3 - \sum_{J \in \mathcal{L}} (|V(J)| - 3)
\end{aligned}
$$

Estructura de la tesis

Tamaño de una solución minimal

ALG: (1) Construir conjunto de componentes que tengan pocas aristas por vértice
(2) Corregir

Garantías de Aproximación

Algoritmo Refinado

Estructura de la tesis

ALG: (1) Construir conjunto de componentes que tengan pocas aristas por vértice
(2) Corregir

Utilidad:

$$U(F) = -|F| + \sum_{J \in \mathcal{L}} (|V(J)| - 3).$$

Algoritmo

Entrada

- (C_n, S)
- $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
- $F \leftarrow \emptyset$
- $N_{\max} \in \mathbb{N}$

Algoritmo

Primera fase

Entrada

- (C_n, S)
- $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
- $F \leftarrow \emptyset$
- $N_{\max} \in \mathbb{N}$

Buscar conjunto $K \in S \setminus F$ tal que $|K| \leq N_{max}$ que cumpla $U(F \cup K) - U(F) \geq (1-\alpha)|V(F \cup K) \setminus V(F)|$

Algoritmo

Primera fase

Entrada

- (C_n, S)
- $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
- $F \leftarrow \emptyset$
- $N_{\max} \in \mathbb{N}$

Buscar conjunto $K \in S \setminus F$ tal que $|K| \leq N_{max}$ que cumpla $U(F \cup K) - U(F) \geq (1-\alpha)|V(F \cup K) \setminus V(F)|$ $\xrightarrow{\text{Si se puede}}$ $F \leftarrow F \cup K$

Algoritmo

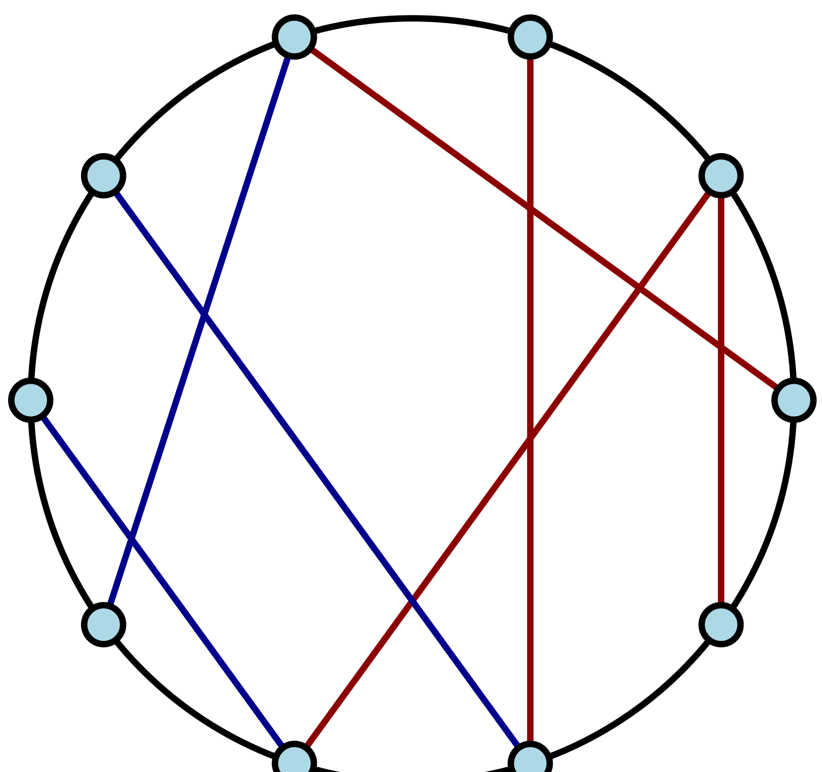
Primera fase

Entrada

- (C_n, S)
- $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
- $F \leftarrow \emptyset$
- $N_{\max} \in \mathbb{N}$

Buscar conjunto $K \in S \setminus F$ tal que $|K| \leq N_{max}$ que cumpla $U(F \cup K) - U(F) \geq (1-\alpha)|V(F \cup K) \setminus V(F)|$ $\xrightarrow[\text{Si se puede}]{}$ $F \leftarrow F \cup K$

$$\frac{|K|}{|V(K \cup F) \setminus V(F)|} \leq \alpha$$



Algoritmo

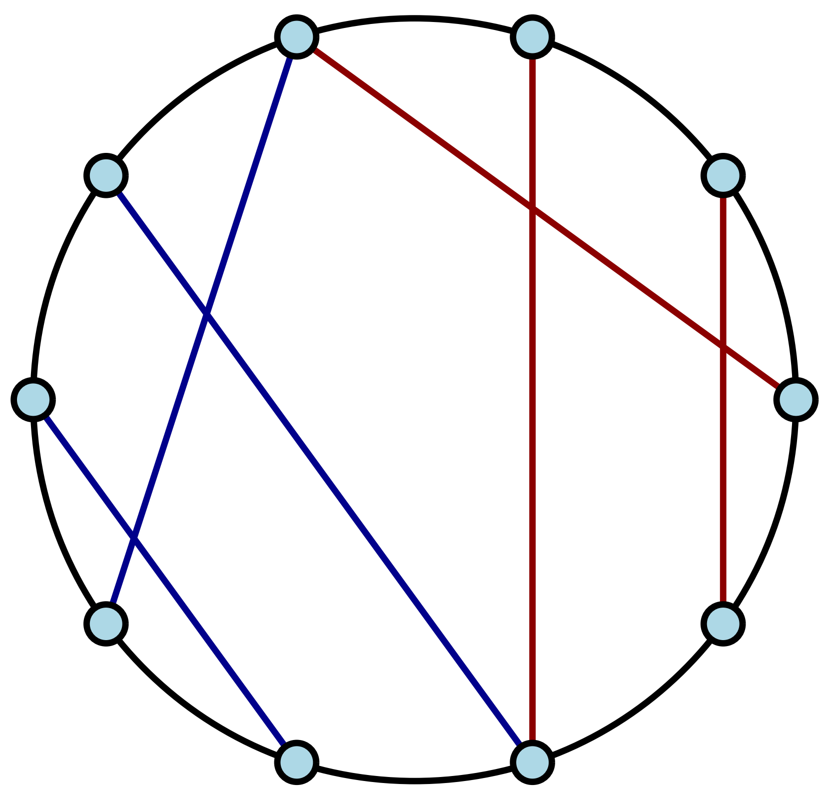
Primera fase

Entrada

- (C_n, S)
- $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
- $F \leftarrow \emptyset$
- $N_{\max} \in \mathbb{N}$

Buscar conjunto $K \in S \setminus F$ tal que $|K| \leq N_{max}$ que cumpla $U(F \cup K) - U(F) \geq (1-\alpha)|V(F \cup K) \setminus V(F)|$ $\xrightarrow[\text{Si se puede}]{}$ $F \leftarrow F \cup K$

$$\frac{|K|+1}{|V(K \cup F) \setminus V(F)|} \leq \alpha$$



2 vértices repetidos

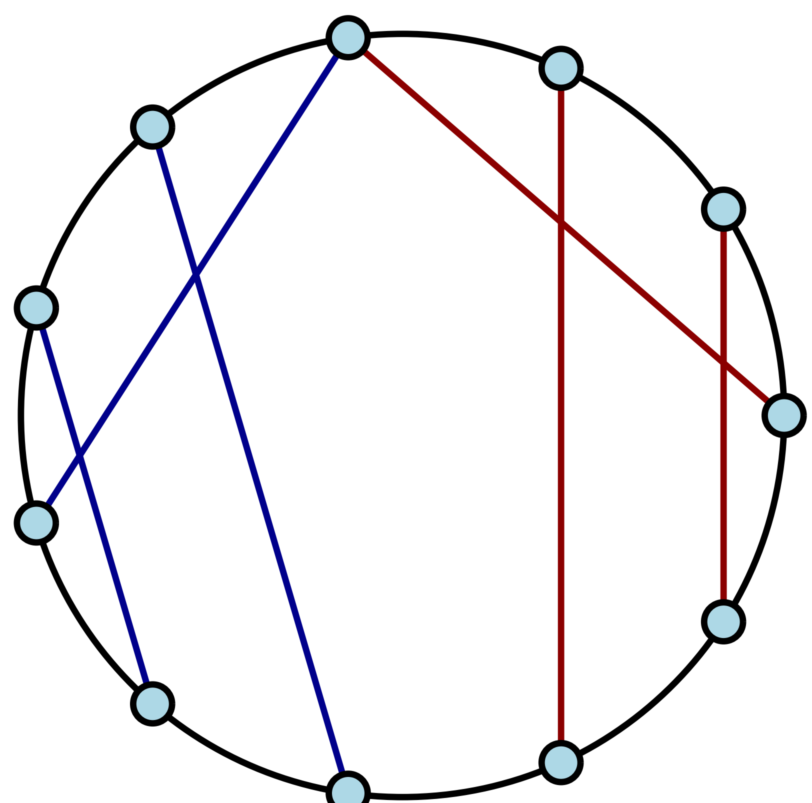
Algoritmo

Primera fase

Entrada

- (C_n, S)
- $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
- $F \leftarrow \emptyset$
- $N_{\max} \in \mathbb{N}$

Buscar conjunto $K \in S \setminus F$ tal que $|K| \leq N_{max}$ que cumpla $U(F \cup K) - U(F) \geq (1-\alpha)|V(F \cup K) \setminus V(F)|$ $\xrightarrow{\text{Si se puede}}$ $F \leftarrow F \cup K$



$$\frac{|K|+2}{|V(K \cup F) \setminus V(F)|} \leq \alpha$$

1 Vértice repetido

Algoritmo

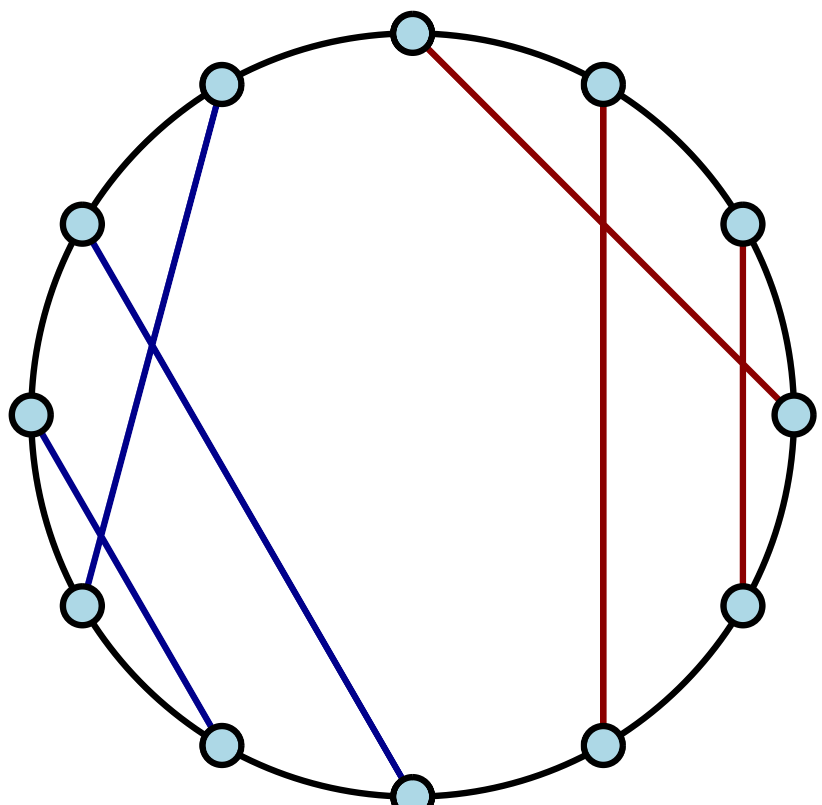
Primera fase

Entrada

- (C_n, S)
- $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
- $F \leftarrow \emptyset$
- $N_{\max} \in \mathbb{N}$

Buscar conjunto $K \in S \setminus F$ tal que $|K| \leq N_{max}$ que cumpla $U(F \cup K) - U(F) \geq (1-\alpha)|V(F \cup K) \setminus V(F)|$ $\xrightarrow{\text{Si se puede}}$ $F \leftarrow F \cup K$

$$\frac{|K|+3}{|V(K \cup F) \setminus V(F)|} \leq \alpha$$



Sin vértices repetidos

Algoritmo

Primera fase

Entrada

- (C_n, S)
- $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
- $F \leftarrow \emptyset$
- $N_{\max} \in \mathbb{N}$

Buscar conjunto $K \in S \setminus F$ tal que $|K| \leq N_{max}$ que cumpla $U(F \cup K) - U(F) \geq (1-\alpha)|V(F \cup K) \setminus V(F)|$

Si se puede

$F \leftarrow F \cup K$

Si no se puede

Segunda fase Encontrar una completación minimal Q de F

Algoritmo

Primera fase

Entrada

- (C_n, S)
- $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
- $F \leftarrow \emptyset$
- $N_{\max} \in \mathbb{N}$

Buscar conjunto $K \in S \setminus F$ tal que $|K| \leq N_{max}$ que cumpla $U(F \cup K) - U(F) \geq (1-\alpha)|V(F \cup K) \setminus V(F)|$

Si se puede

$F \leftarrow F \cup K$

Si no se puede

Segunda fase Encontrar una completación minimal Q de F

devolver (Q, F)

$$|ALG| \leq \ |Q| + |F|$$

$$
\begin{aligned}
|ALG| &\leq |Q| + |F| \\
&\leq n - 3 - \textstyle\sum_{J \in \mathcal{L}} (|V(J)| - 3) + |F|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|ALG| &\leq |Q| + |F| \\
&\leq n - 3 - \sum_{J \in \mathcal{L}} (|V(J)| - 3) + |F| \\
&\leq n - 3 - U(F)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|ALG| &\leq |Q| + |F| \\
&\leq n - 3 - \sum_{J \in \mathcal{L}} (|V(J)| - 3) + |F| \\
&\leq n - 3 - U(F)
\end{aligned}
$$

Si F_i es F en la i-ésima iteración, $U(F) = \sum_{i=1}^{q} U(F_i) - U(F_{i-1})$

$$
\begin{aligned}
|ALG| &\leq |Q| + |F| \\
&\leq n - 3 - \sum_{J \in \mathcal{L}} (|V(J)| - 3) + |F| \\
&\leq n - 3 - U(F)
\end{aligned}
$$

Si F_i es F en la i-ésima iteración, $U(F) = \sum_{i=1}^{q} \underbrace{U(F_i) - U(F_{i-1})}_{\geq (1-\alpha)|V(F_i) \setminus V(F_{i-1})|}$

$$
\begin{aligned}
|ALG| &\leq \ |Q| + |F| \\
&\leq \ n - 3 - \textstyle\sum_{J \in \mathcal{L}} (|V(J)| - 3) + |F| \\
&\leq \ n - 3 - U(F)
\end{aligned}
$$

Si F_i es F en la i-ésima iteración, $U(F) = \sum_{i=1}^{q} \underbrace{U(F_i) - U(F_{i-1})}_{\geq (1-\alpha)|V(F_i) \setminus V(F_{i-1})|}$

$$\boxed{|ALG| \leq \ (n - |V(F)|) + \alpha |V(F)|}$$

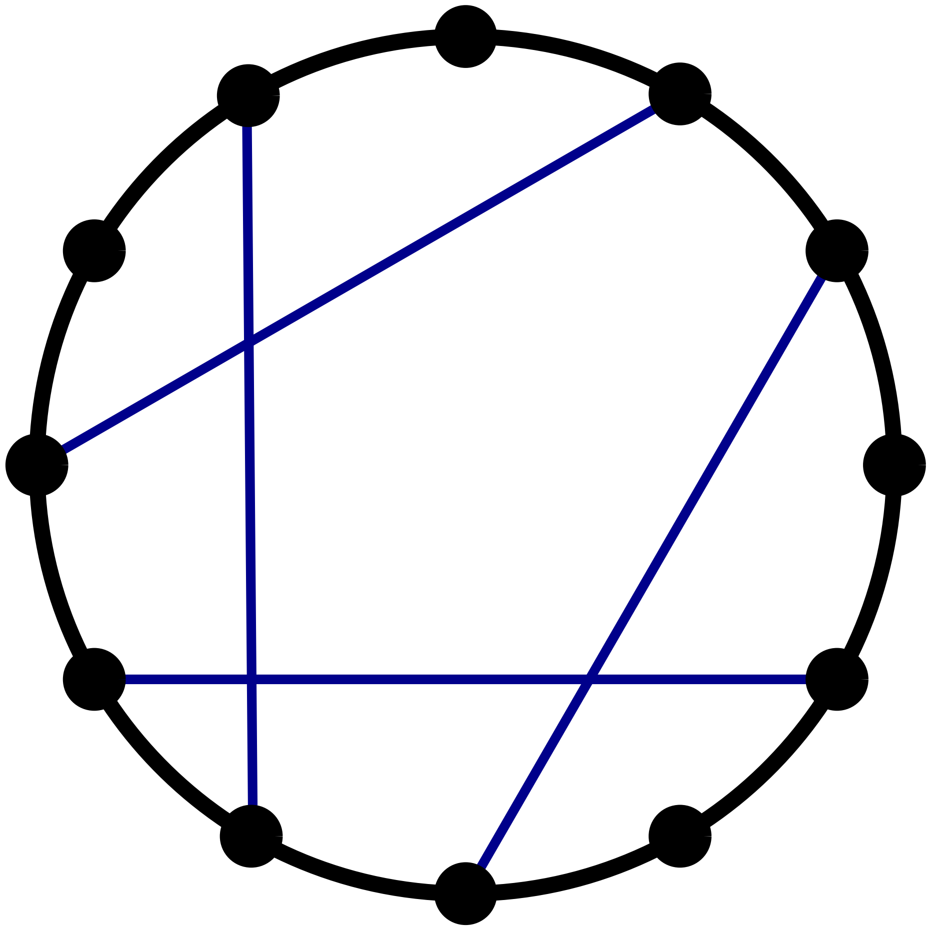
$$
\begin{aligned}
|ALG| &\le |Q| + |F| \\
&\le n - 3 - \textstyle\sum_{J\in\mathcal{L}}(|V(J)| - 3) + |F| \\
&\le n - 3 - U(F)
\end{aligned}
$$

Si F_i es F en la i-ésima iteración, $U(F) = \sum_{i=1}^{q} \underbrace{U(F_i) - U(F_{i-1})}_{\geq (1-\alpha)|V(F_i)\setminus V(F_{i-1})|}$

$$\boxed{|ALG| \le (n - |V(F)|) + \alpha|V(F)|}$$

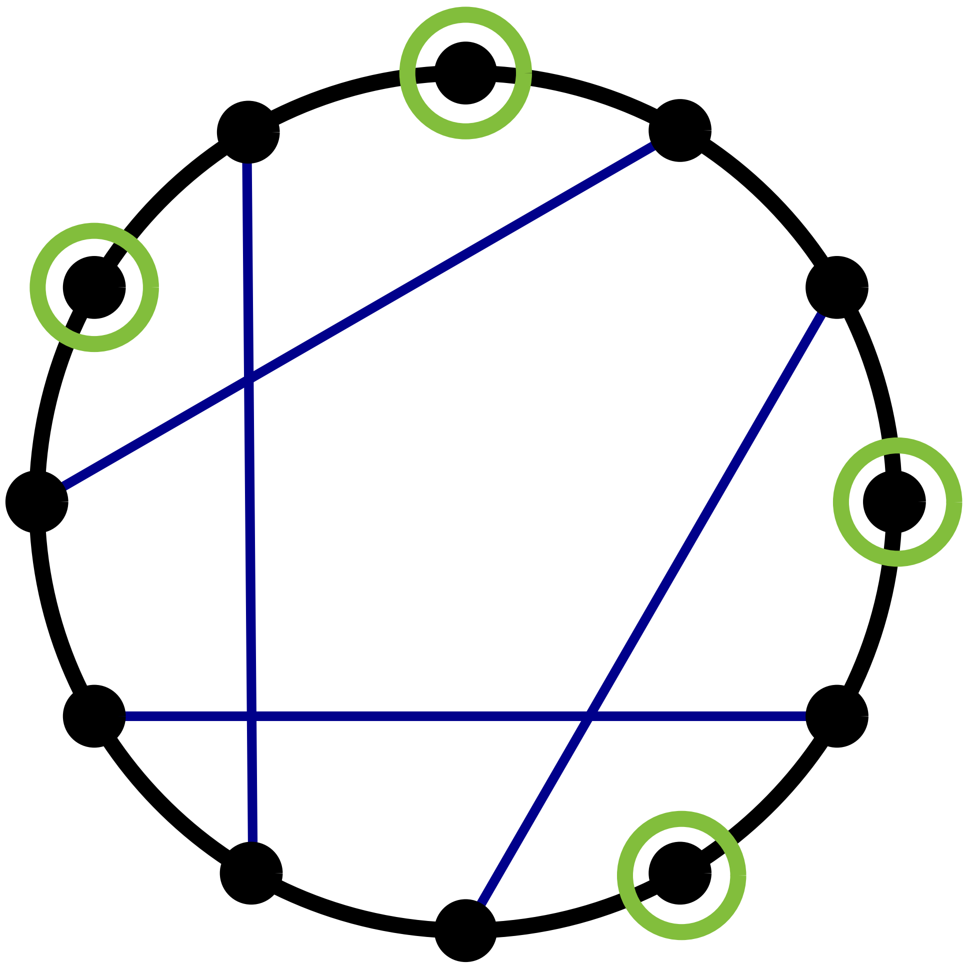
Y es polinomial!

Lemas técnicos



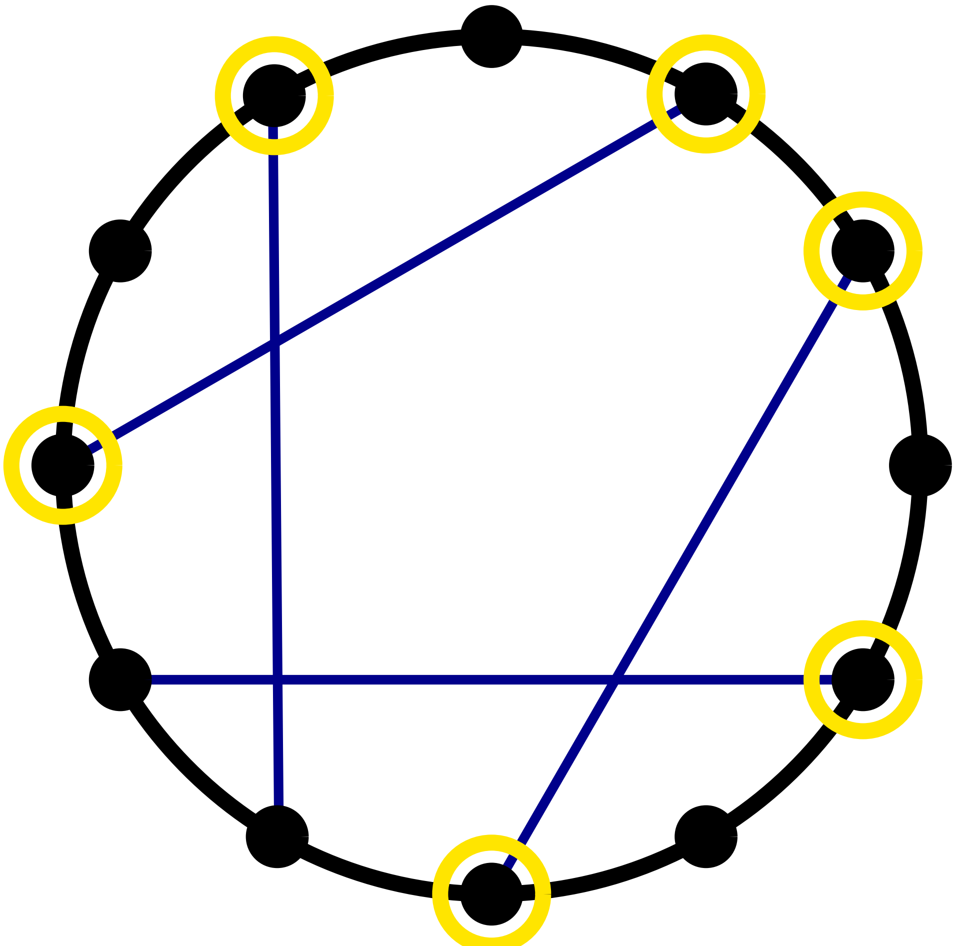
- F^* es (α, N_{max})-crítico

Lemas técnicos



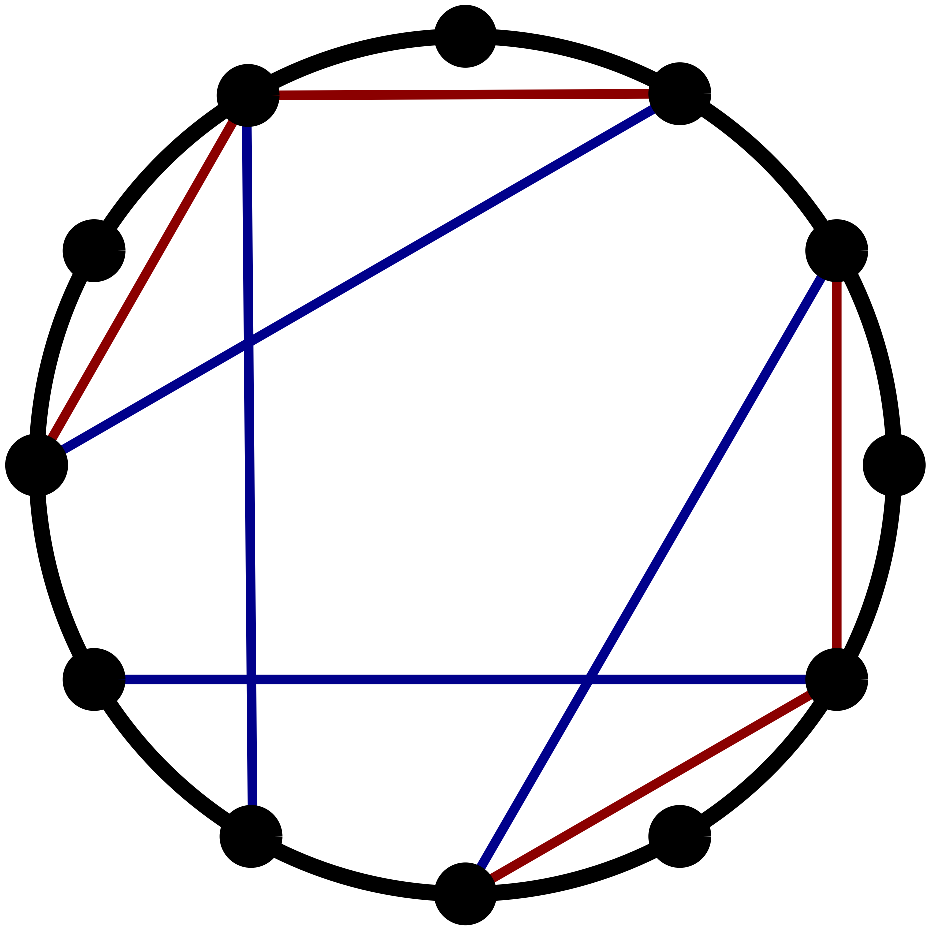
- F^* es (α, N_{max})-crítico
- $V' = V(C_n) \setminus V(F^*)$

Lemas técnicos



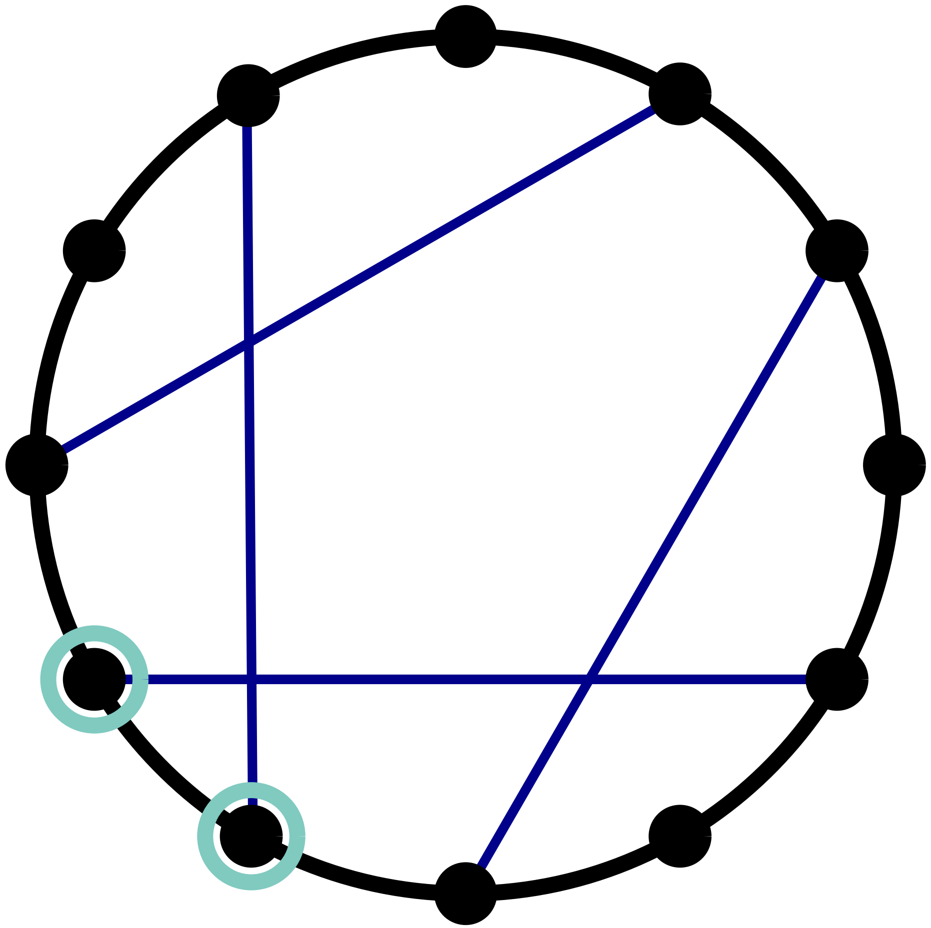
- F^* es (α, N_{max})-crítico
- $V' = V(C_n) \setminus V(F^*)$
- $B(F^*)$ vértices de borde

Lemas técnicos



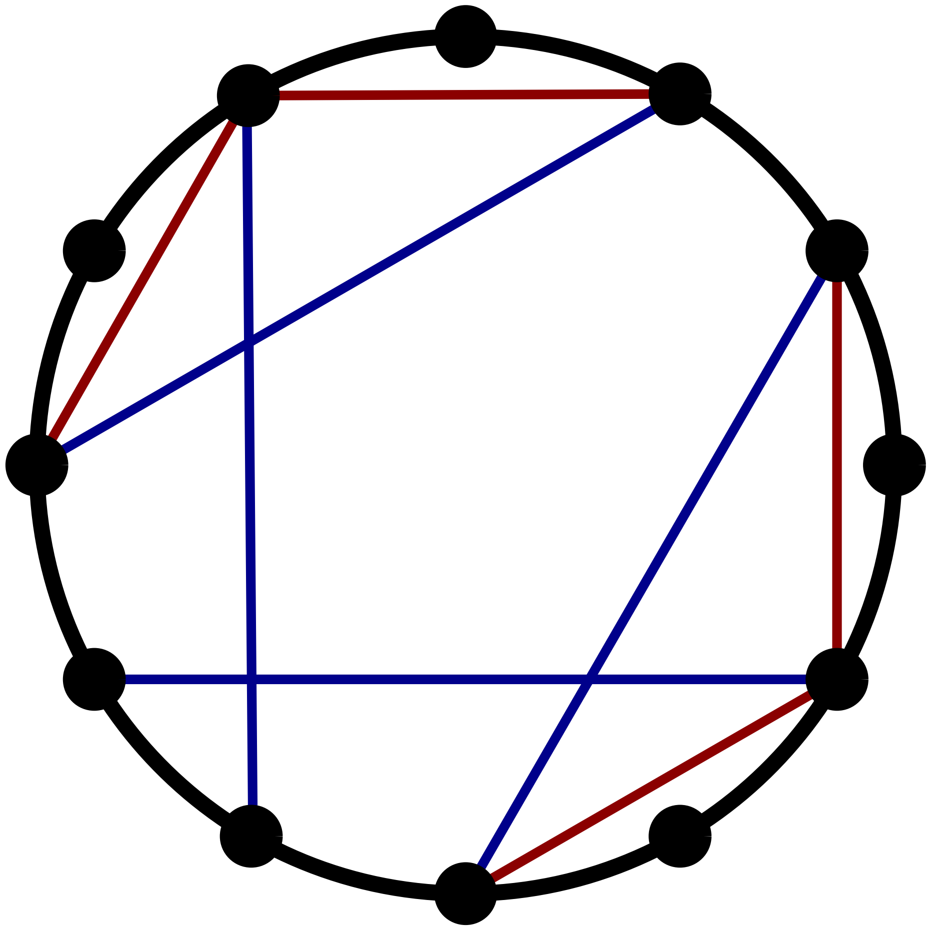
- F^* es (α, N_{max})-crítico
- $V' = V(C_n) \setminus V(F^*)$
- $B(F^*)$ vértices de borde
- $P(F^*) = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} P(J)$ perímetro

Lemas técnicos



- F^* es (α, N_{max})-crítico
- $V' = V(C_n) \setminus V(F^*)$
- $B(F^*)$ vértices de borde
- $P(F^*) = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} P(J)$ perímetro
- $A(F^*) = V(F^*) \setminus B(F^*)$ vértices internos

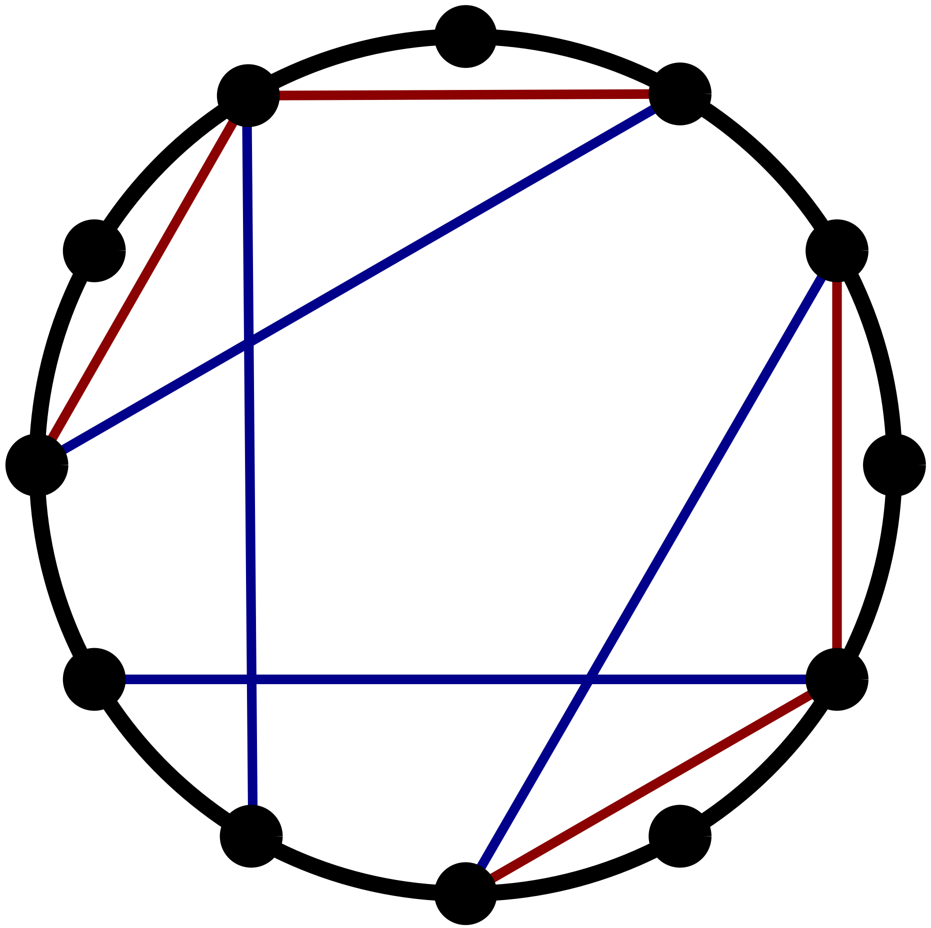
Lemas técnicos



- F^* es (α, N_{max})-crítico
- $V' = V(C_n) \setminus V(F^*)$
- $B(F^*)$ vértices de borde
- $P(F^*) = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} P(J)$ perímetro
- $A(F^*) = V(F^*) \setminus B(F^*)$ vértices internos

Lema 1: $|P(F^*)| \geq |B(F^*)|/2$

Lemas técnicos

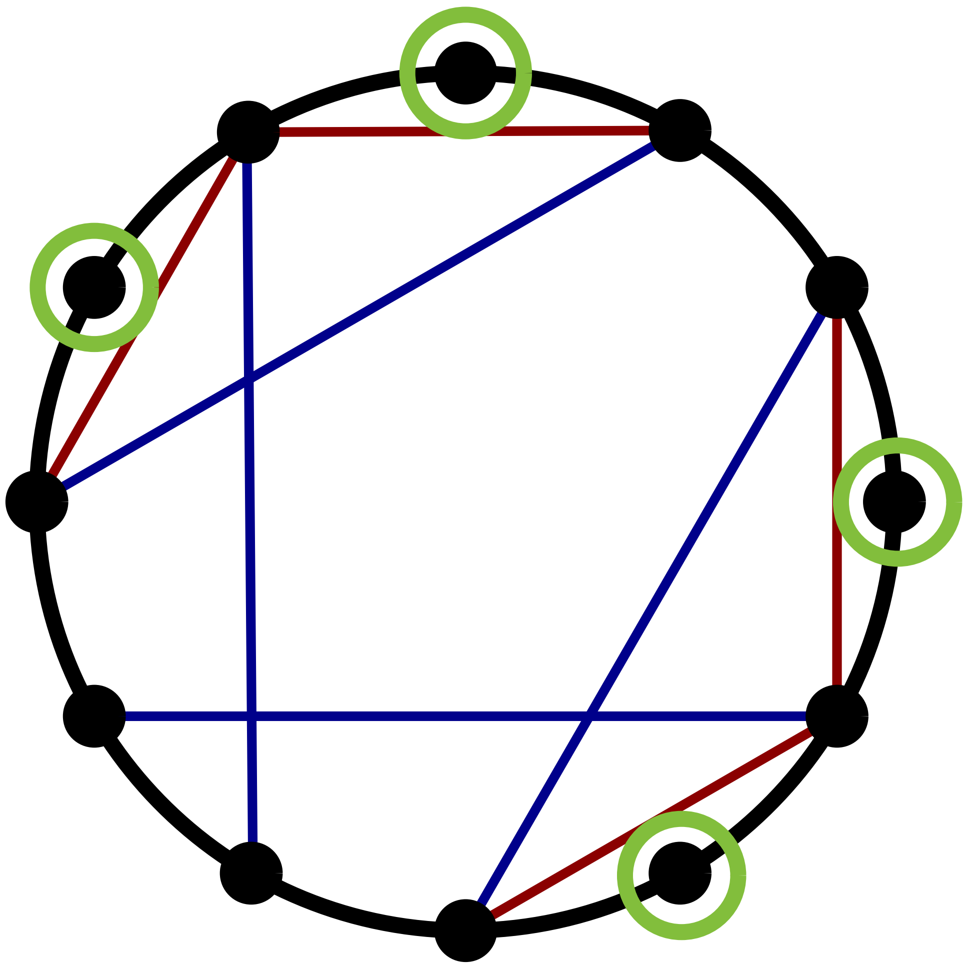


- F^* es (α, N_{max})-crítico
- $V' = V(C_n) \setminus V(F^*)$
- $B(F^*)$ vértices de borde
- $P(F^*) = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} P(J)$ perímetro
- $A(F^*) = V(F^*) \setminus B(F^*)$ vértices internos

Lema 1: $|P(F^*)| \geq |B(F^*)|/2$

Lema 2: Link $e \in S$ cruza a lo más una cuerda en $P(F^*)$. Si ambos extremos están en C, no puede cruzar a ninguna.

Lemas técnicos



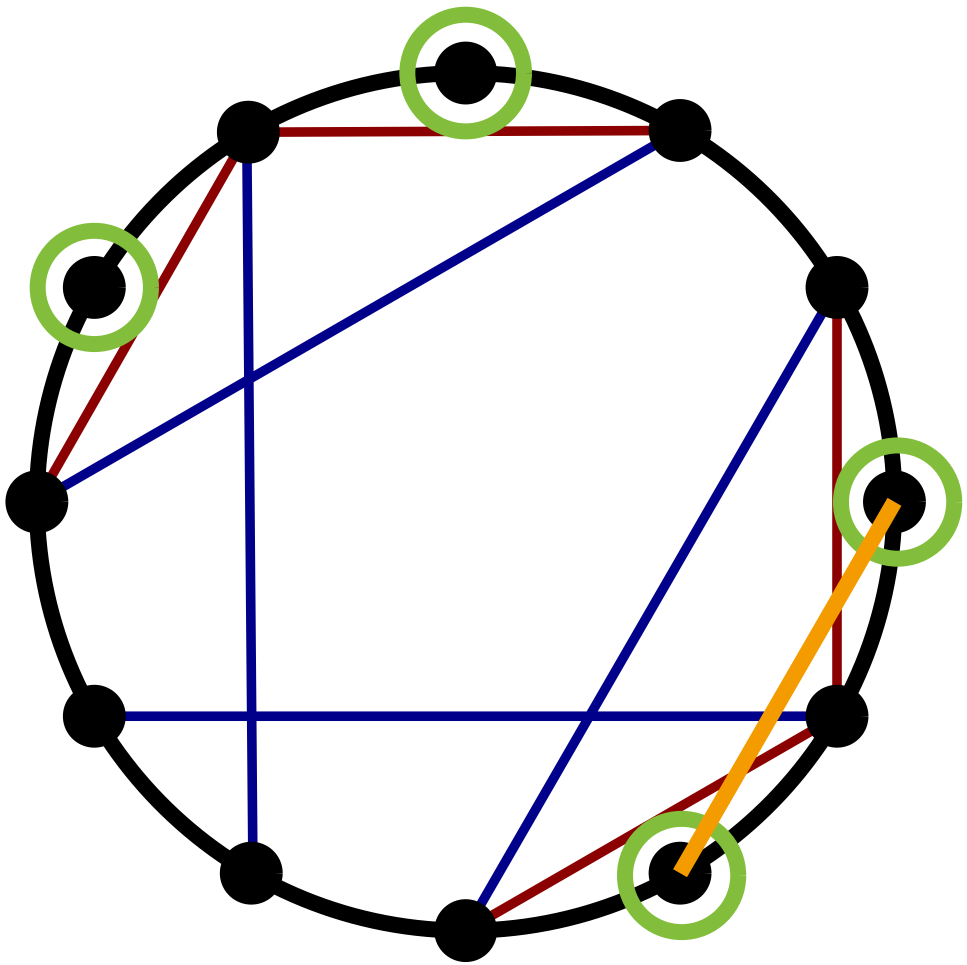
- F^* es (α, N_{max})-crítico
- $V' = V(C_n) \setminus V(F^*)$
- $B(F^*)$ vértices de borde
- $P(F^*) = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} P(J)$ perímetro
- $A(F^*) = V(F^*) \setminus B(F^*)$ vértices internos

Lema 1: $|P(F^*)| \geq |B(F^*)|/2$

Lema 2: Link $e \in S$ cruza a lo más una cuerda en $P(F^*)$. Si ambos extremos están en C, no puede cruzar a ninguna.

Intuición:

Lemas técnicos



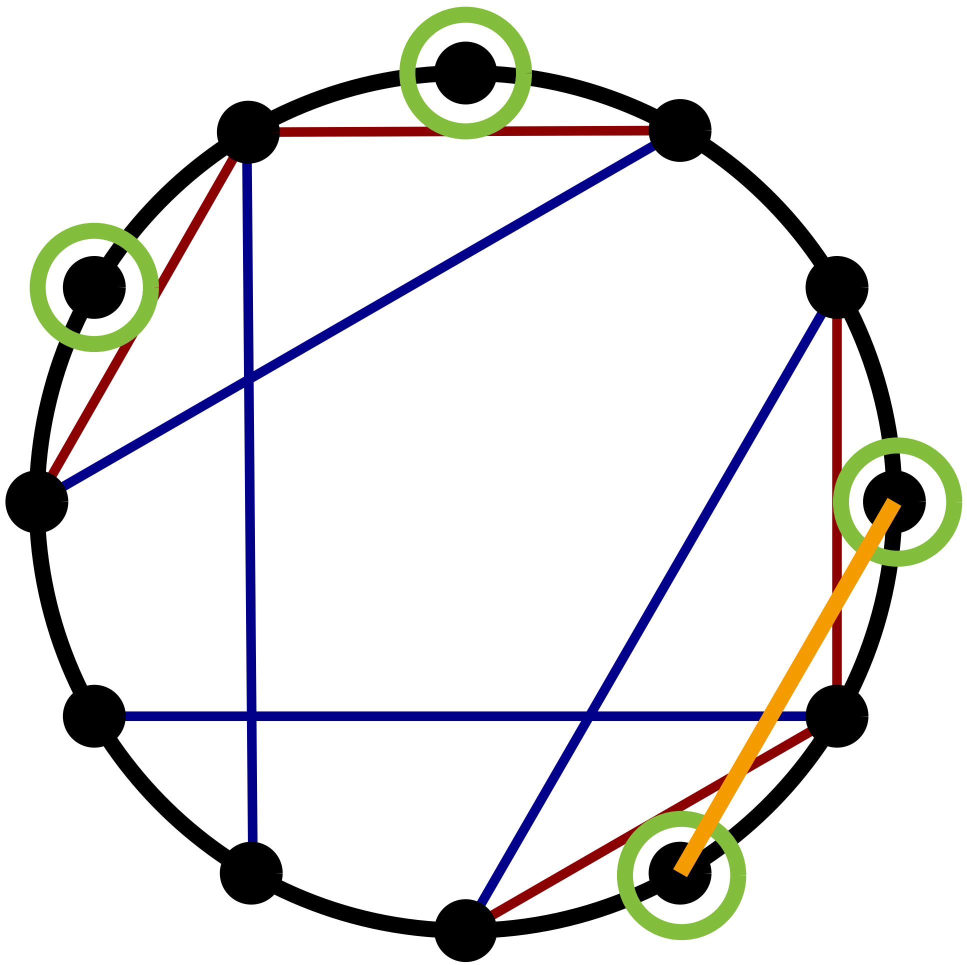
- F^* es (α, N_{max})-crítico
- $V' = V(C_n) \setminus V(F^*)$
- $B(F^*)$ vértices de borde
- $P(F^*) = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} P(J)$ perímetro
- $A(F^*) = V(F^*) \setminus B(F^*)$ vértices internos

Lema 1: $|P(F^*)| \geq |B(F^*)|/2$

Lema 2: Link $e \in S$ cruza a lo más una cuerda en $P(F^*)$. Si ambos extremos están en C, no puede cruzar a ninguna.

Intuición:

Lemas técnicos



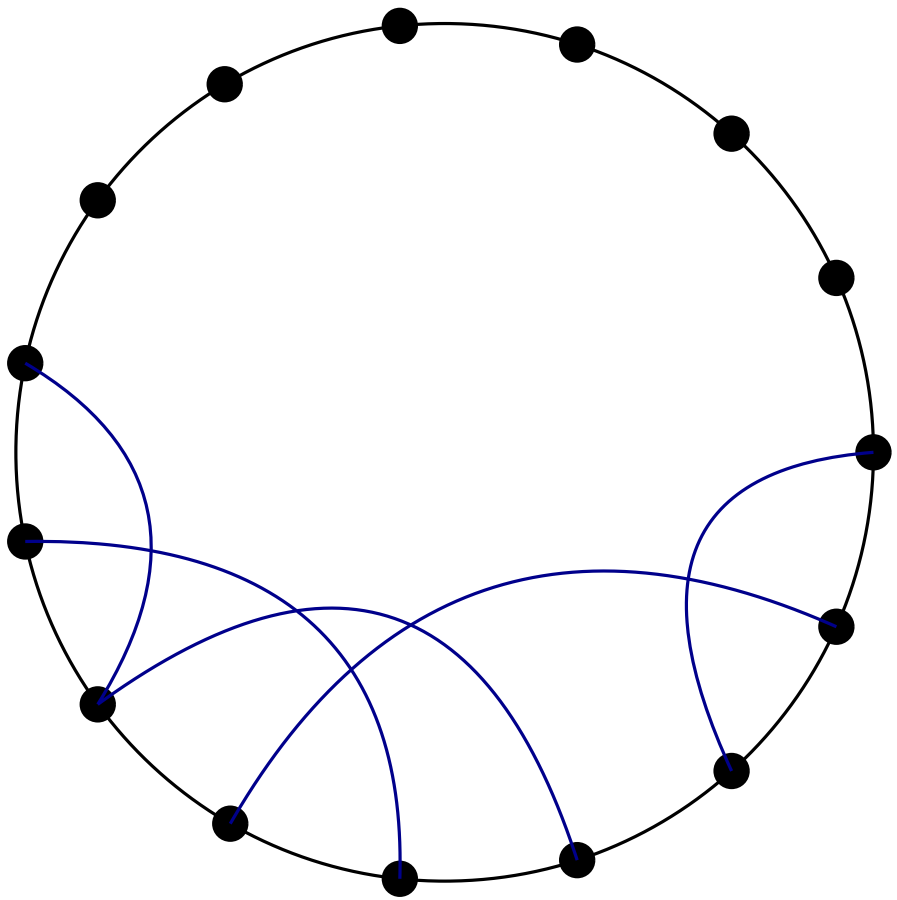
- F^* es (α, N_{max})-crítico
- $V' = V(C_n) \setminus V(F^*)$
- $B(F^*)$ vértices de borde
- $P(F^*) = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} P(J)$ perímetro
- $A(F^*) = V(F^*) \setminus B(F^*)$ vértices internos

Lema 1: $|P(F^*)| \geq |B(F^*)|/2$

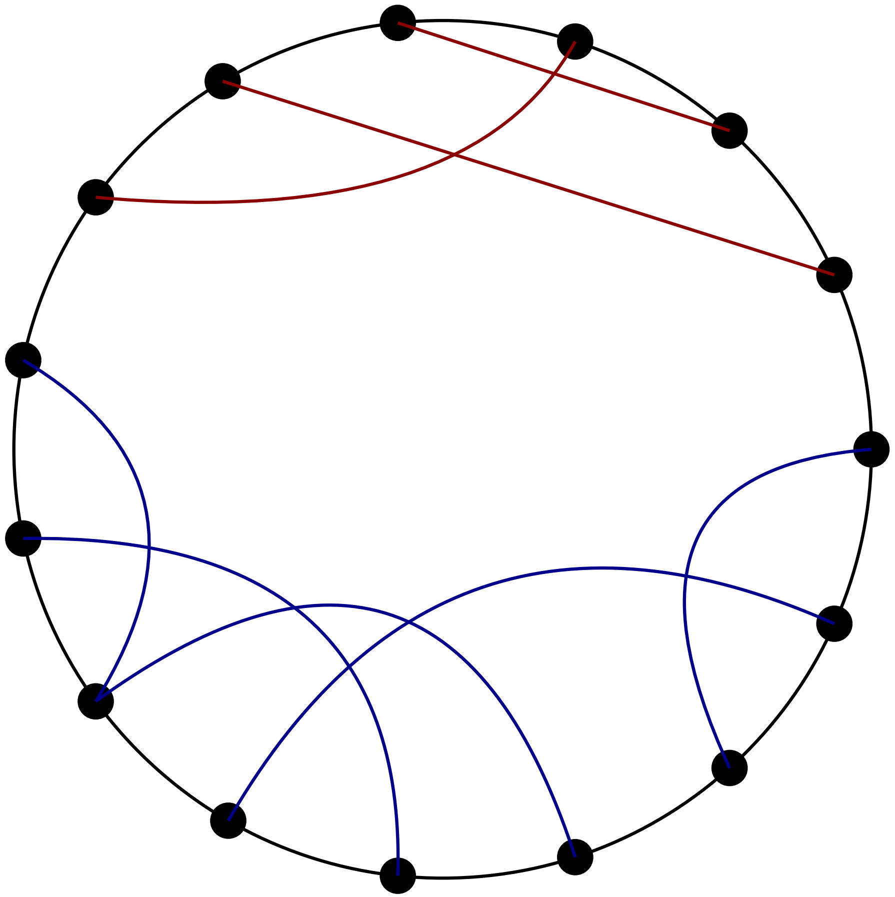
Lema 2: Link $e \in S$ cruza a lo más una cuerda en $P(F^*)$. Si ambos extremos están en C, no puede cruzar a ninguna.

Intuición: En caso contrario, ya las habríamos agregado a F^*!

Lemas técnicos

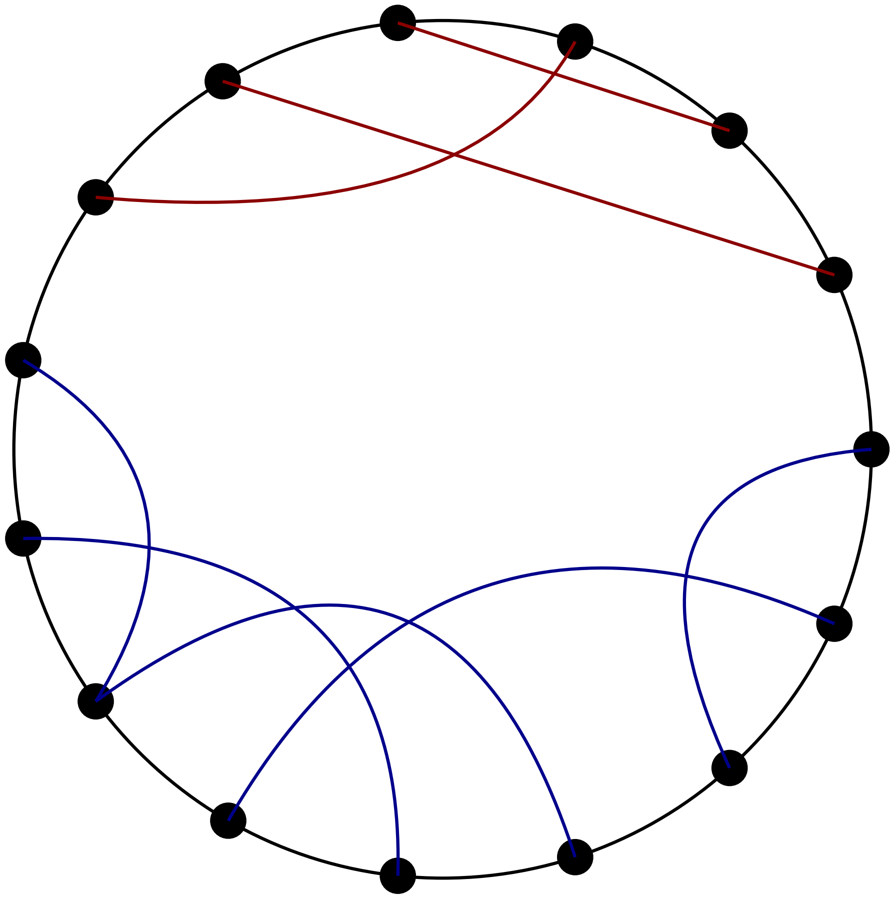


Lemas técnicos



$$M \subseteq OPT[V']$$

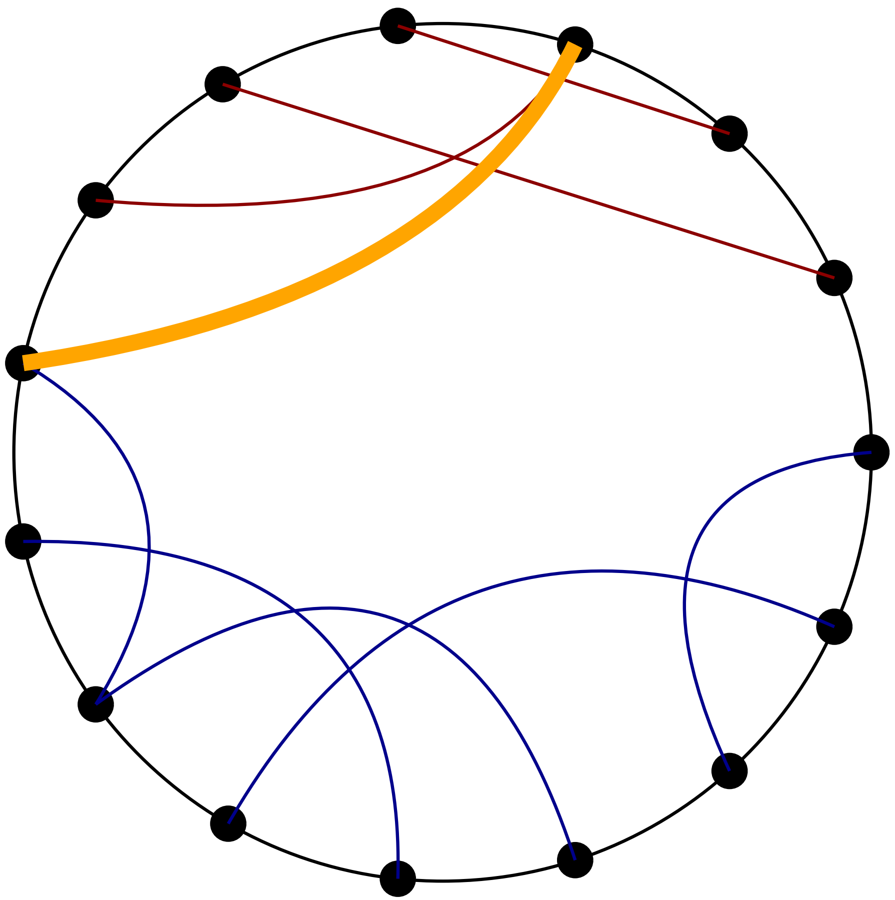
Lemas técnicos



$$M \subseteq OPT[V']$$

$$D = V(M)$$

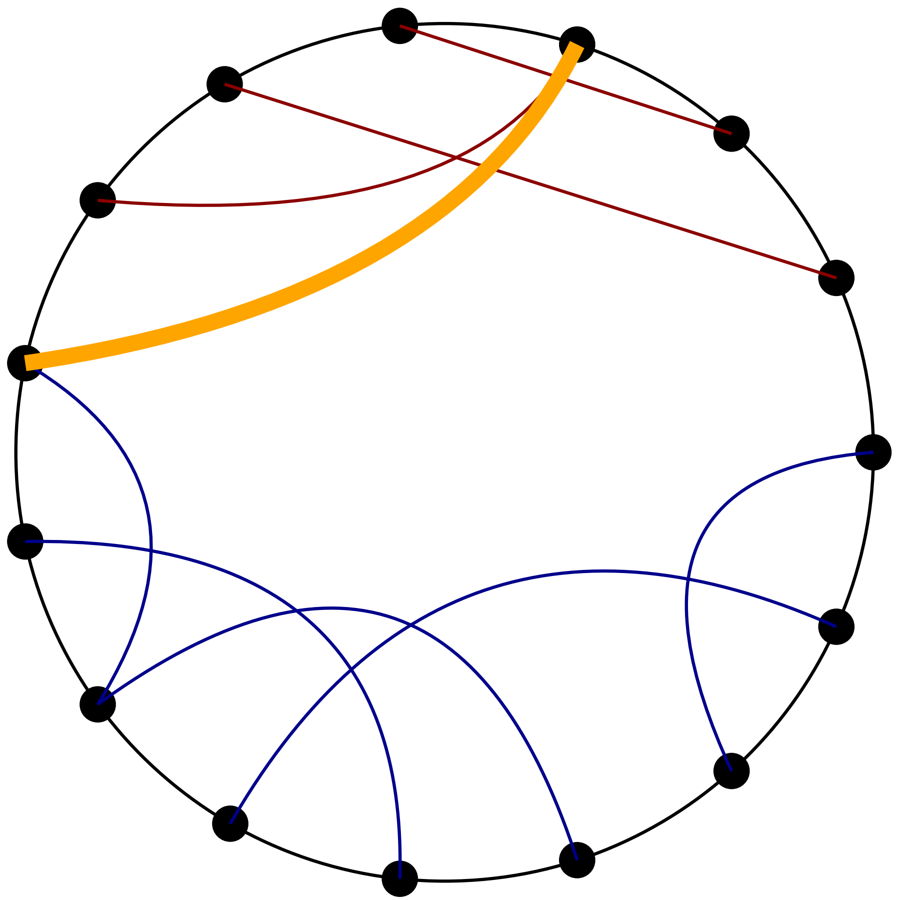
Lemas técnicos



$$M \subseteq OPT[V'] \qquad D = V(M)$$

$e \in S$ **conecta** un conjunto de links X si el grafo circular asociado a $X \cup \{e\}$ es conexo

Lemas técnicos



$$M \subseteq OPT[V'] \qquad D = V(M)$$

$e \in S$ **conecta** un conjunto de links X si el grafo circular asociado a $X \cup \{e\}$ es conexo

Lema: Un link $e \in S \setminus (M \cup F^*)$ conecta a lo más $\max\left\{0, \left\lceil \frac{5 - 2X(e) - V_{F^*}(e) - (4 - V_M(e) - V_{F^*}(e))\alpha}{2\alpha - 1} \right\rceil \right\}$. En particular, ningún link conecta más que $\ell = \lceil (5 - 2\alpha)/(2\alpha - 1) \rceil$ links de M.

Estructura de la tesis

Tamaño de una solución minimal

ALG: (1) Construir conjunto de componentes que tengan pocas aristas por vértice
(2) Corregir

Garantías de Aproximación

Algoritmo Refinado

Estructura de la tesis

Garantías de Aproximación

Idea: Si F es pequeño el óptimo debe ser más grande que $n/2$

Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Mejores cotas inferiores

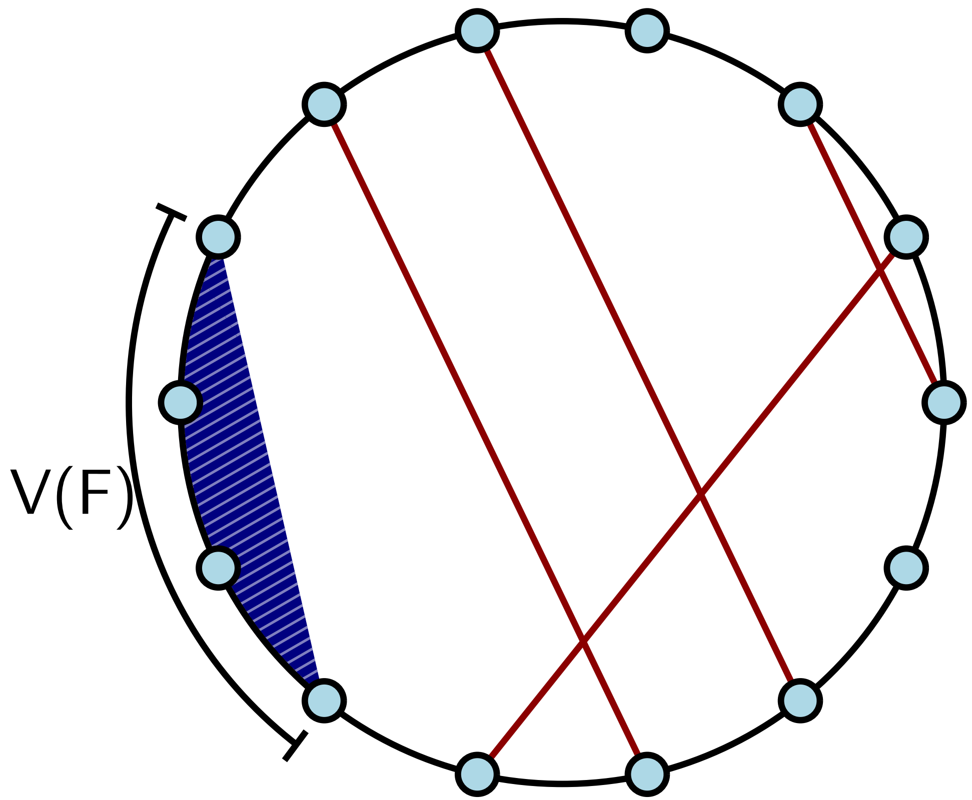
Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'

Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'

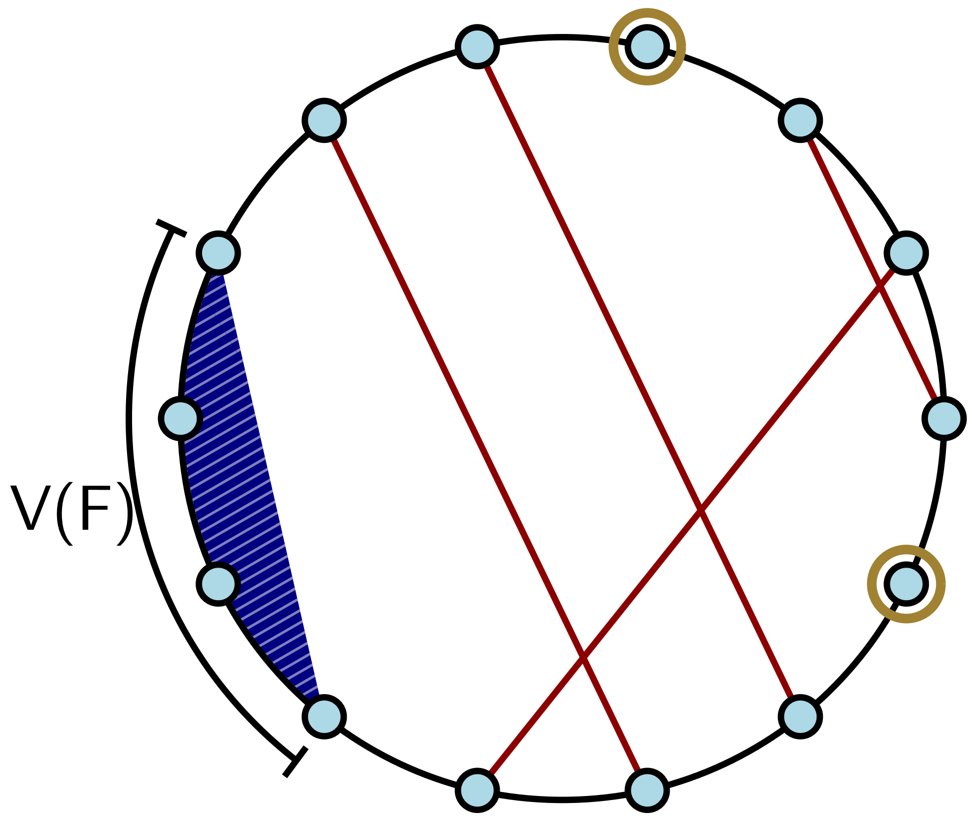


$$|V'| = 2|M| + |C|$$

Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'



$$|V'| = 2|M| + |C|$$

$$|C| = n - |V(F)| - 2|M|$$

Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'

$$OPT \geq |M| + |C| = n - |V(F)| - |M|$$

Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'

$$OPT \geq |M| + |C| = n - |V(F)| - |M|$$

Tercera cota

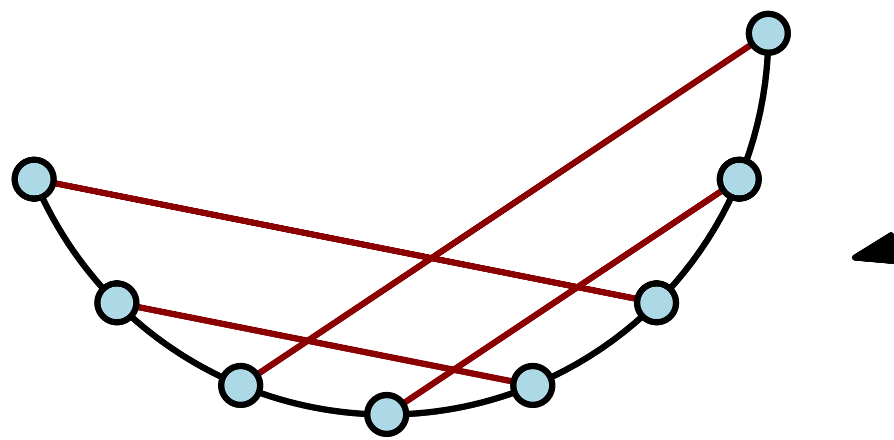
Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'

$$OPT \geq |M| + |C| = n - |V(F)| - |M|$$

Tercera cota



Aristas de M deben estar unidas al resto de la solución

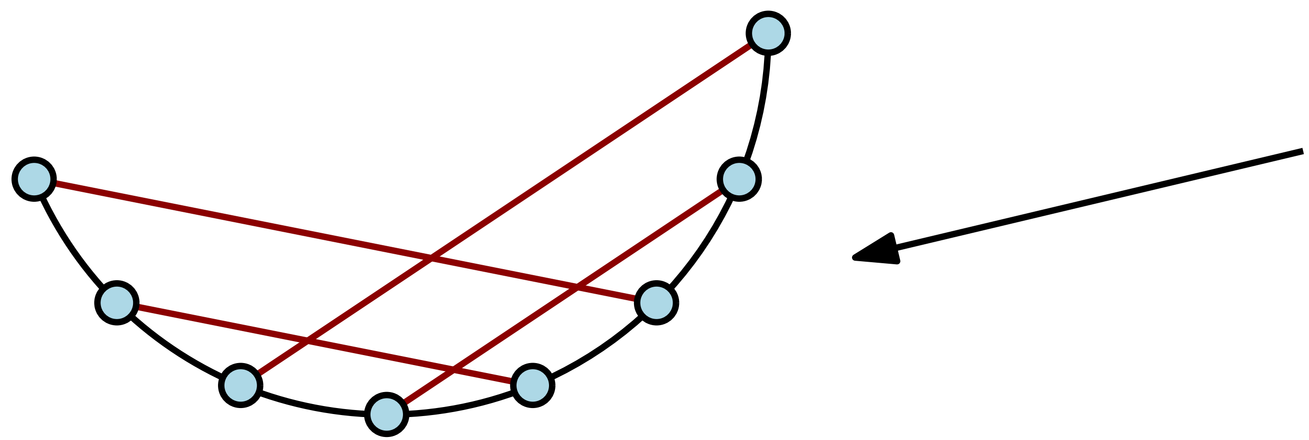
Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

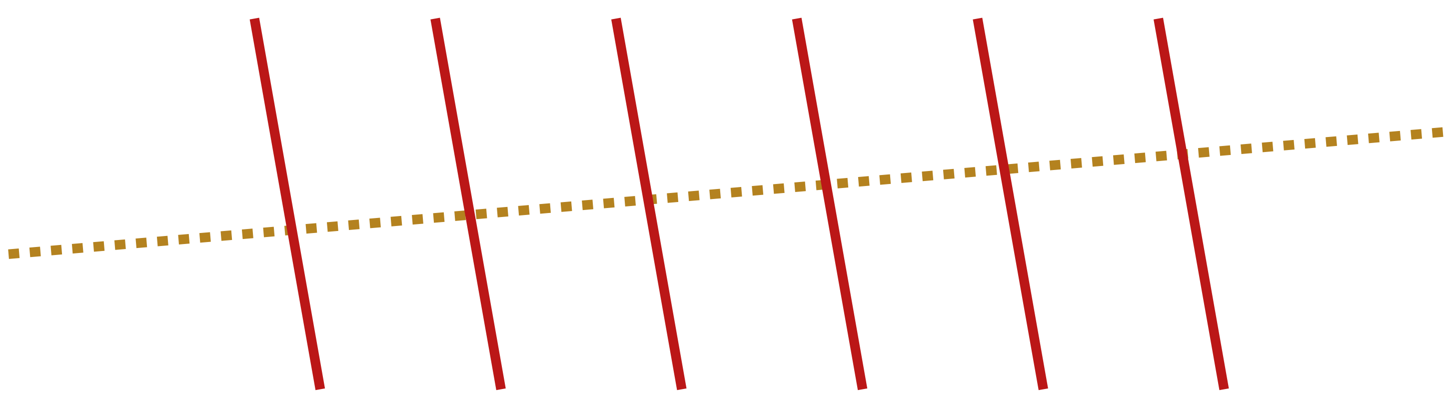
Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'

$$OPT \geq |M| + |C| = n - |V(F)| - |M|$$

Tercera cota



Aristas de M deben estar unidas al resto de la solución



Si una arista conecta muchas de M la hubieramos agregado!

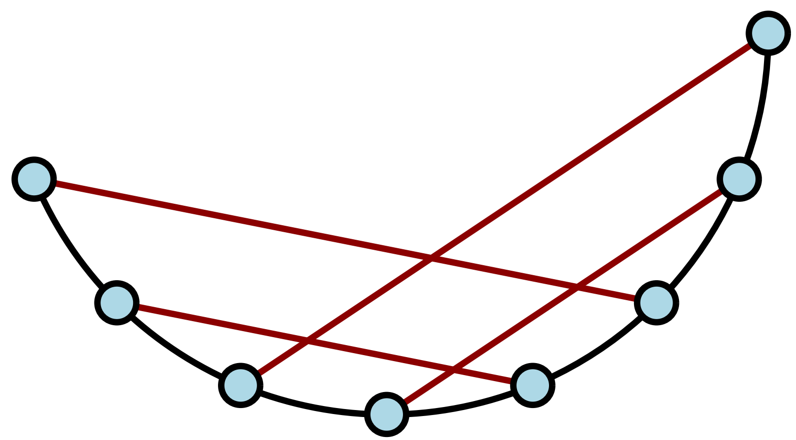
Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'

$$OPT \geq |M| + |C| = n - |V(F)| - |M|$$

Tercera cota



Aristas de M deben estar unidas al resto de la solución

$OPT \geq |M| + |M|/\ell$, donde ℓ es el máximo número de aristas de M que puede conectar $e \in OPT \setminus M$

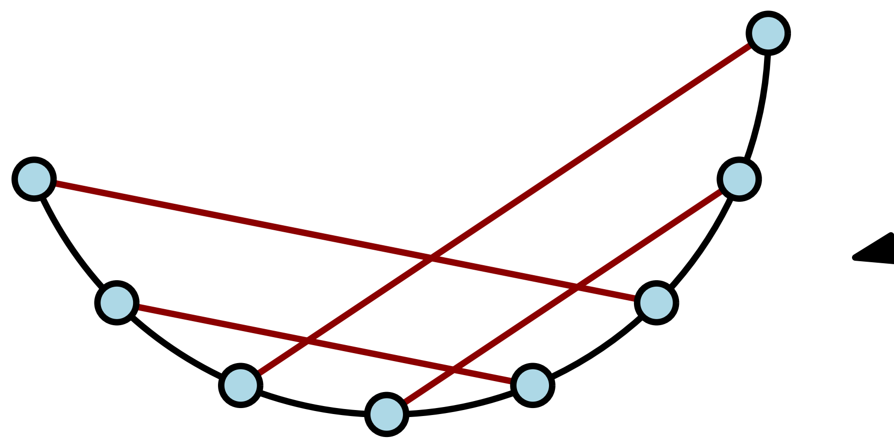
Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'

$$OPT \geq |M| + |C| = n - |V(F)| - |M|$$

Tercera cota



Aristas de M deben estar unidas al resto de la solución

$OPT \geq |M| + |M|/\ell$, donde ℓ es el máximo número de aristas de M que puede conectar $e \in OPT \setminus M$

Por el lema anterior $\ell \leq \lceil \frac{5-2\alpha}{2\alpha-1} \rceil$

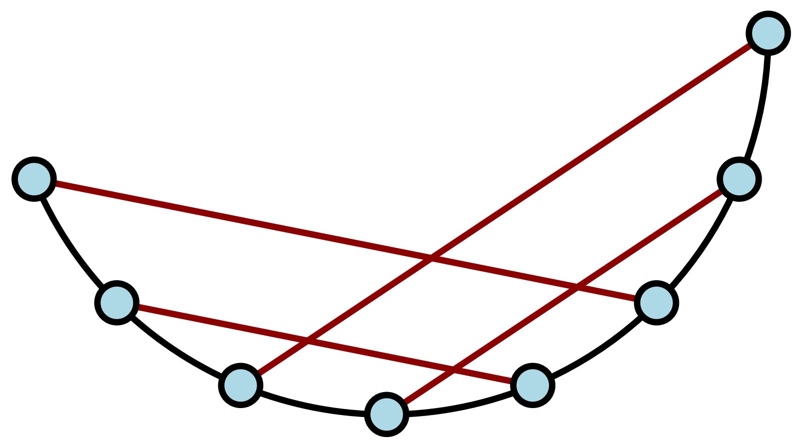
Mejores cotas inferiores

Primera cota $OPT \geq \frac{n}{2}$

Segunda cota Sea M un matching máximo de OPT en V'

$$OPT \geq |M| + |C| = n - |V(F)| - |M|$$

Tercera cota



Aristas de M deben estar unidas al resto de la solución

$OPT \geq |M| + |M|/\ell$, donde ℓ es el máximo número de aristas de M que puede conectar $e \in OPT \setminus M$

$$= |M| + \frac{|M|}{\lceil \frac{5-2\alpha}{2\alpha-1} \rceil}$$

$$ALG \leq \alpha|V(F)| + (n - |V(F)|)$$

Cotas

- $OPT \geq n/2$
- $OPT \geq n - |M| - |V(F)|$
- $OPT \geq |M| + |M|/\ell$
- $\ell = \lceil \frac{5-2\alpha}{2\alpha-1} \rceil$

$$ALG \leq \alpha|V(F)| + (n - |V(F)|)$$
$$ALG \leq \alpha n + (n - |V(F)|)(1 - \alpha)$$

Cotas

- $OPT \geq n/2$
- $OPT \geq n - |M| - |V(F)|$
- $OPT \geq |M| + |M|/\ell$
- $\ell = \lceil \frac{5-2\alpha}{2\alpha-1} \rceil$

$$ALG \leq \alpha|V(F)| + (n - |V(F)|)$$
$$ALG \leq \alpha n + (n - |V(F)|)(1-\alpha)$$
$$ALG \leq \alpha n + (n - |V(F)| - |M|)(1-\alpha) + |M|(1-\alpha)$$

Cotas

- $OPT \geq n/2$
- $OPT \geq n - |M| - |V(F)|$
- $OPT \geq |M| + |M|/\ell$
- $\ell = \lceil \frac{5-2\alpha}{2\alpha-1} \rceil$

$$ALG \leq \alpha|V(F)| + (n - |V(F)|)$$

$$ALG \leq \alpha n + (n - |V(F)|)(1 - \alpha)$$

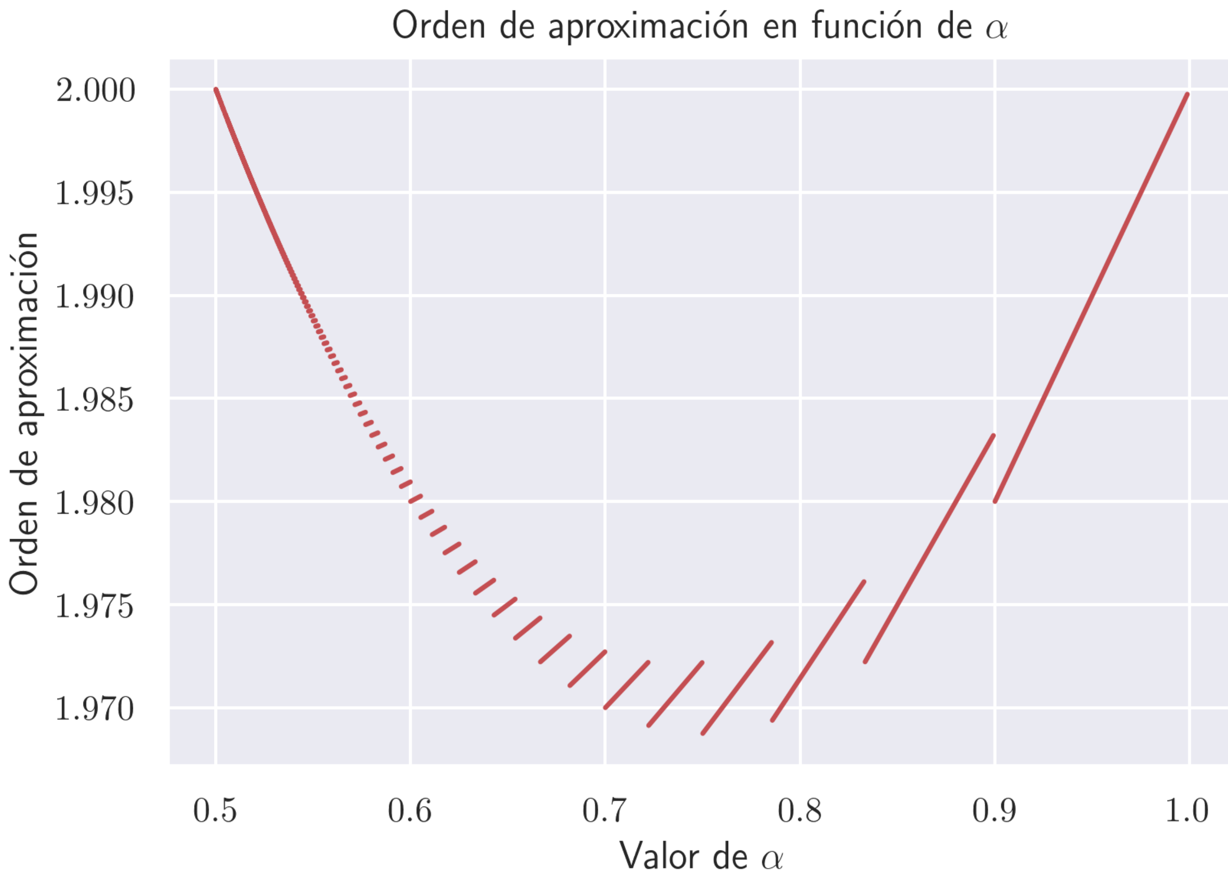
$$ALG \leq \alpha n + (n - |V(F)| - |M|)(1 - \alpha) + |M|(1 - \alpha)$$

$$ALG \leq OPT(2\alpha + 1 - \alpha + (1 - \alpha)\frac{\ell}{\ell + 1})$$

Cotas

- $OPT \geq n/2$
- $OPT \geq n - |M| - |V(F)|$
- $OPT \geq |M| + |M|/\ell$
- $\ell = \lceil \frac{5-2\alpha}{2\alpha-1} \rceil$

$$ALG \leq \alpha|V(F)| + (n - |V(F)|)$$
$$ALG \leq \alpha n + (n - |V(F)|)(1-\alpha)$$
$$ALG \leq \alpha n + (n - |V(F)| - |M|)(1-\alpha) + |M|(1-\alpha)$$
$$ALG \leq OPT(2\alpha + 1 - \alpha + (1-\alpha)\tfrac{\ell}{\ell+1})$$



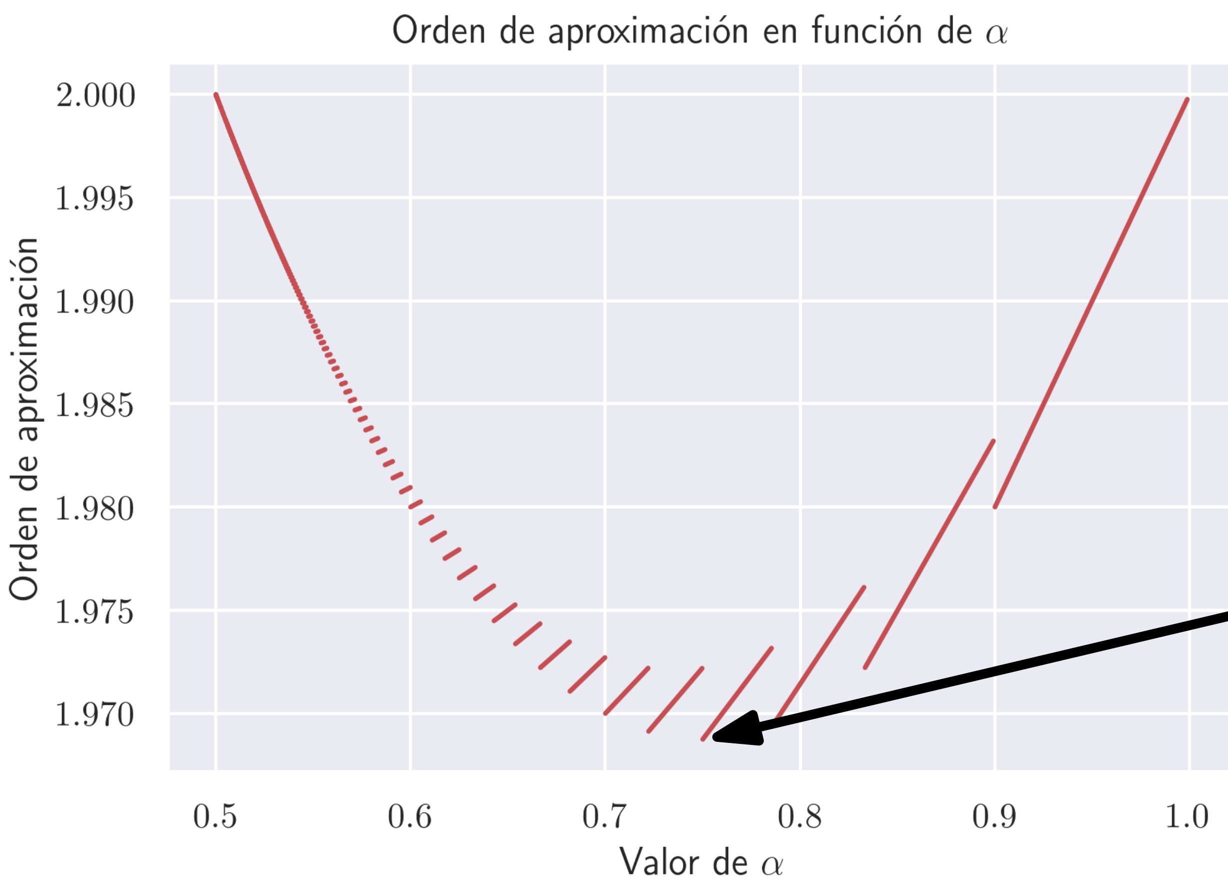
Cotas

- $OPT \geq n/2$
- $OPT \geq n - |M| - |V(F)|$
- $OPT \geq |M| + |M|/\ell$
- $\ell = \lceil \frac{5-2\alpha}{2\alpha-1} \rceil$

$$ALG \leq \alpha|V(F)| + (n - |V(F)|)$$
$$ALG \leq \alpha n + (n - |V(F)|)(1-\alpha)$$
$$ALG \leq \alpha n + (n - |V(F)| - |M|)(1-\alpha) + |M|(1-\alpha)$$
$$ALG \leq OPT(2\alpha + 1 - \alpha + (1-\alpha)\frac{\ell}{\ell+1})$$

Cotas

- $OPT \geq n/2$
- $OPT \geq n - |M| - |V(F)|$
- $OPT \geq |M| + |M|/\ell$
- $\ell = \lceil \frac{5-2\alpha}{2\alpha-1} \rceil$



Óptimo se alcanza en $\alpha = 0.75$ y da un orden de $63/32$

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

- Si tienen extremos en A, B, C, D, y si atraviesan a M, P, ambos o ninguno

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

- Si tienen extremos en A, B, C, D, y si atraviesan a M, P, ambos o ninguno

Plantear PL con 43 variables para obtener una mejor cota inferior para el OPT

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

- Si tienen extremos en A, B, C, D, y si atraviesan a M, P, ambos o ninguno

Plantear PL con 43 variables para obtener una mejor cota inferior para el OPT

Función objetivo: suma de todas las variables que representan aristas del OPT

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

- Si tienen extremos en A, B, C, D, y si atraviesan a M, P, ambos o ninguno

Plantear PL con 43 variables para obtener una mejor cota inferior para el OPT

Función objetivo: suma de todas las variables que representan aristas del OPT

3 tipos de restricciones:

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

- Si tienen extremos en A, B, C, D, y si atraviesan a M, P, ambos o ninguno

Plantear PL con 43 variables para obtener una mejor cota inferior para el OPT

Función objetivo: suma de todas las variables que representan aristas del OPT

3 tipos de restricciones:

- A, B, C deben ser cubiertos

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

- Si tienen extremos en A, B, C, D, y si atraviesan a M, P, ambos o ninguno

Plantear PL con 43 variables para obtener una mejor cota inferior para el OPT

Función objetivo: suma de todas las variables que representan aristas del OPT

3 tipos de restricciones:

- A, B, C deben ser cubiertos
- Un link $e \in S$ cruza a lo más una cuerda de P

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

- Si tienen extremos en A, B, C, D, y si atraviesan a M, P, ambos o ninguno

Plantear PL con 43 variables para obtener una mejor cota inferior para el OPT

Función objetivo: suma de todas las variables que representan aristas del OPT

3 tipos de restricciones:

- A, B, C deben ser cubiertos
- Un link $e \in S$ cruza a lo más una cuerda de P
- Cada link $e \in S \setminus (M \cup F^*)$ cruza a lo más ℓ links de M

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

- Si tienen extremos en A, B, C, D, y si atraviesan a M, P, ambos o ninguno

Plantear PL con 43 variables para obtener una mejor cota inferior para el OPT

Función objetivo: suma de todas las variables que representan aristas del OPT

3 tipos de restricciones:

- A, B, C deben ser cubiertos
- Un link $e \in S$ cruza a lo más una cuerda de P
- Cada link $e \in S \setminus (M \cup F^*)$ cruza a lo más $\underline{\ell}$ links de M

Dados por el lema técnico

Como mejorar el análisis

Dividir OPT en 41 conjuntos!

- Si tienen extremos en A, B, C, D, y si atraviesan a M, P, ambos o ninguno

Plantear PL con 43 variables para obtener una mejor cota inferior para el OPT

Función objetivo: suma de todas las variables que representan aristas del OPT

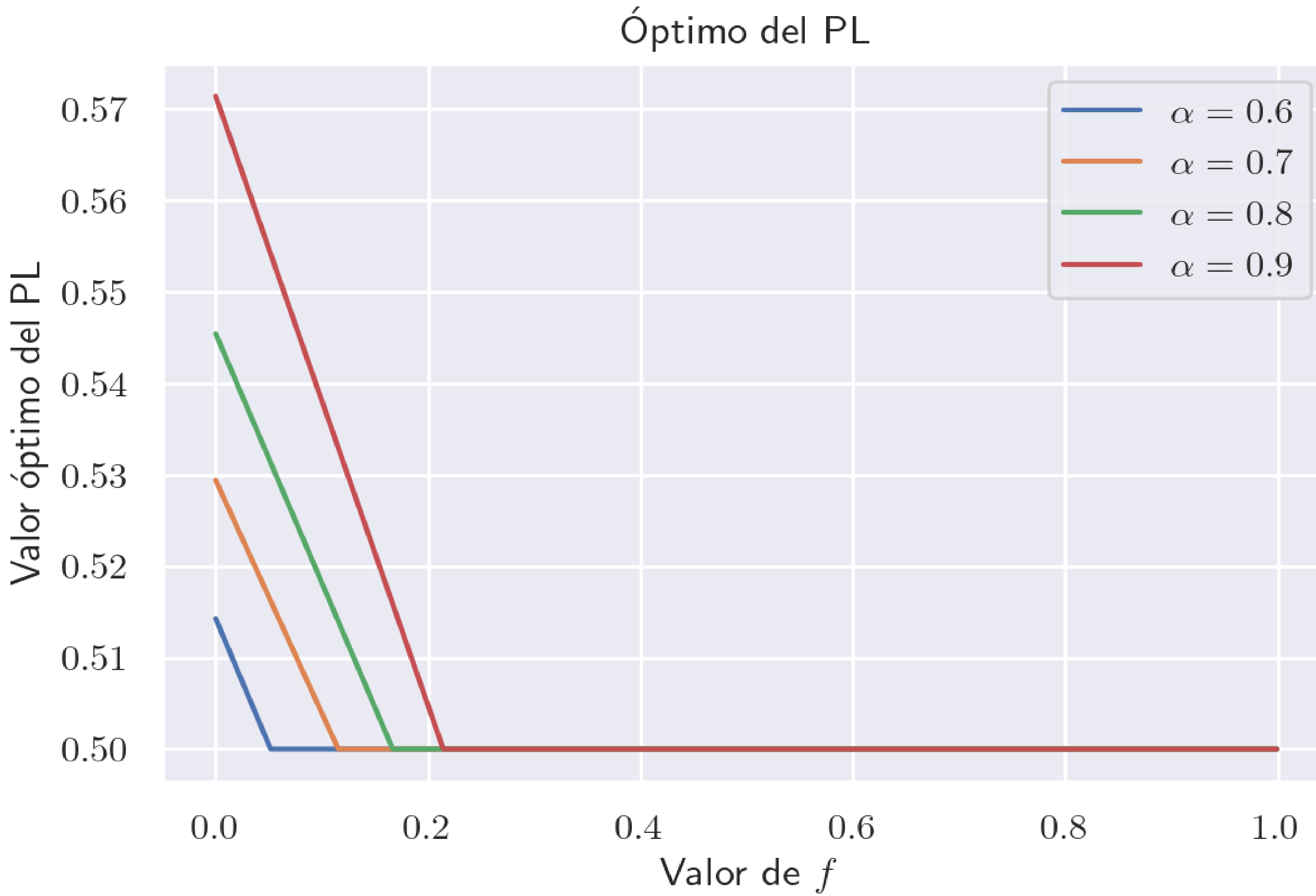
3 tipos de restricciones:

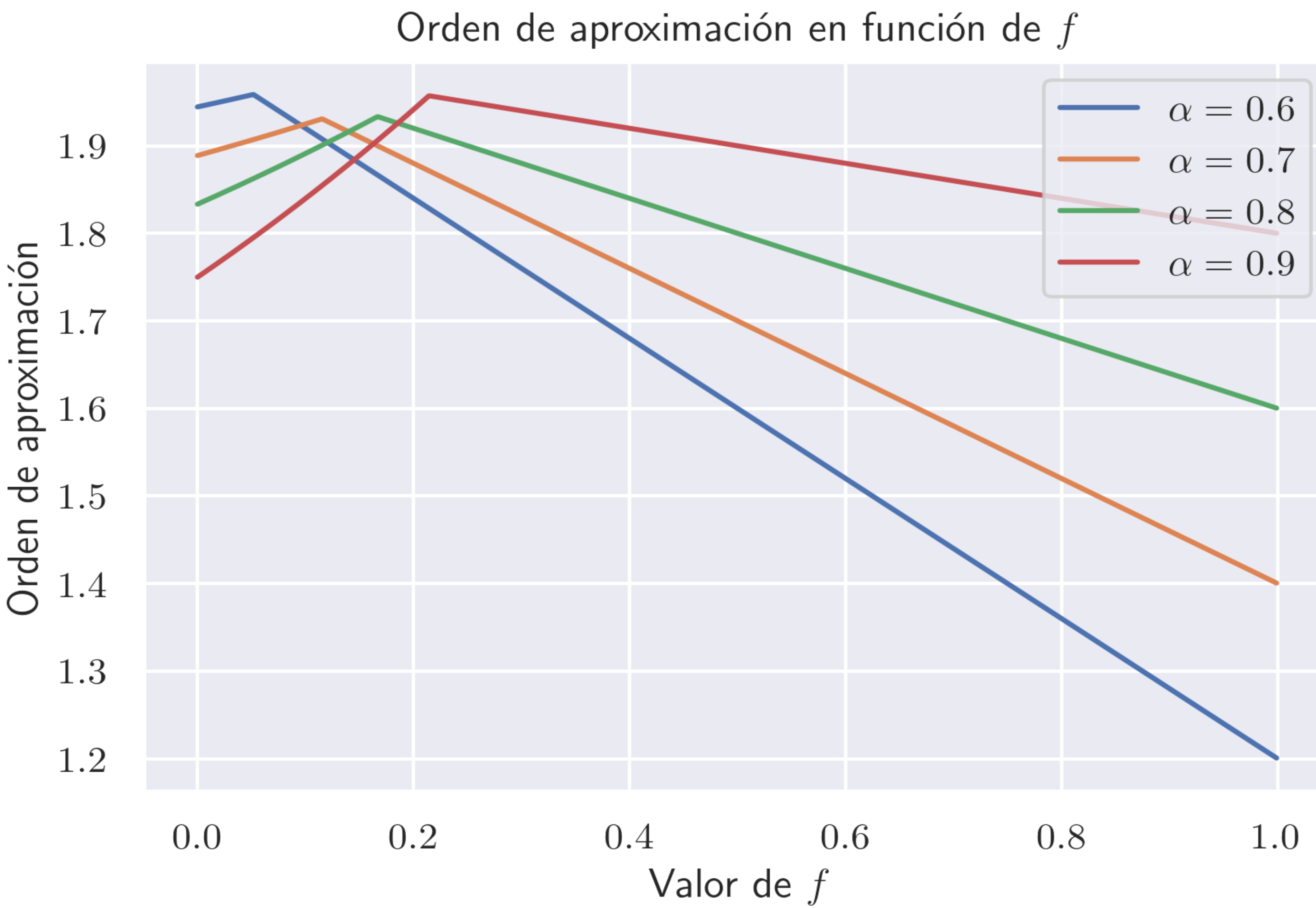
- A, B, C deben ser cubiertos
- Un link $e \in S$ cruza a lo más una cuerda de P
- Cada link $e \in S \setminus (M \cup F^*)$ cruza a lo más $\underline{\ell}$ links de M

Dados por el lema técnico

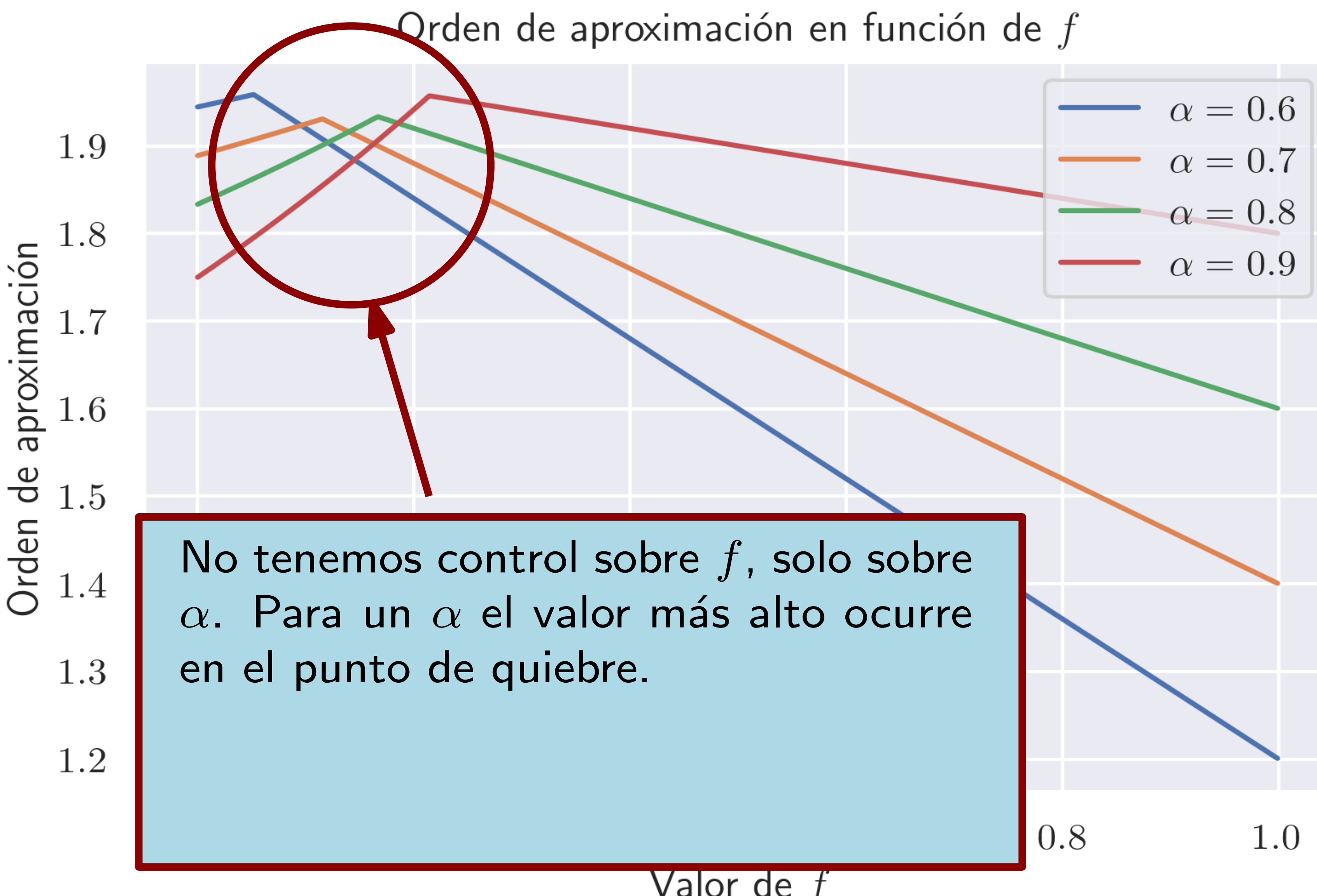
Estrategia: encontrar puntos factibles primales y duales

$$\frac{\mathrm{OPT}(PL)}{n} = \max\left\{\frac{3+3\lceil\frac{5-3\alpha}{2\alpha-1}\rceil}{3+6\lceil\frac{5-3\alpha}{2\alpha-1}\rceil} - \frac{3+2\lceil\frac{4-3\alpha}{2\alpha-1}\rceil+\lceil\frac{2-3\alpha}{2\alpha-1}\rceil}{3+6\lceil\frac{5-3\alpha}{2\alpha-1}\rceil}f, 1/2\right\}$$

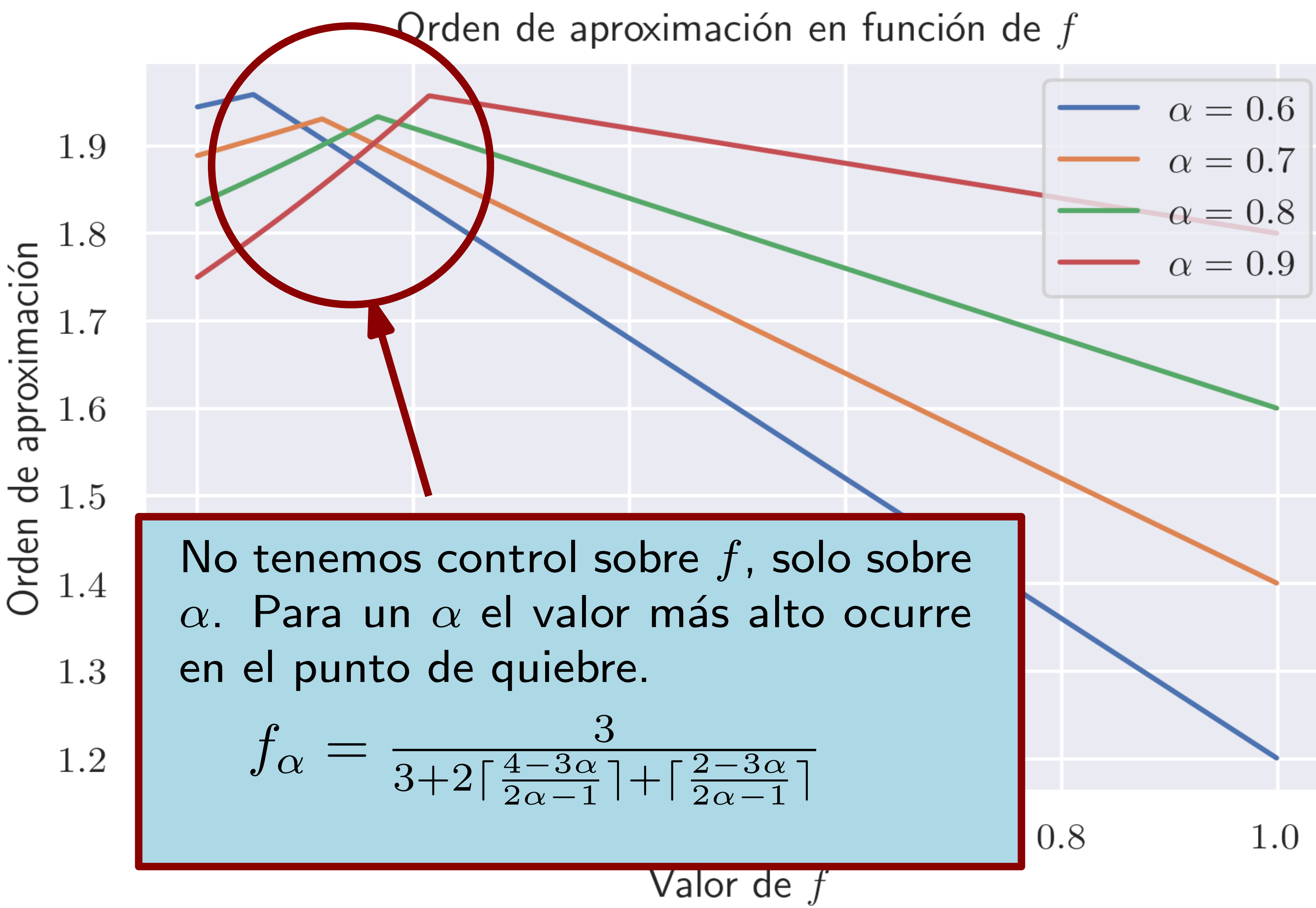




Orden de aproximación en función de f
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
Orden de aproximación
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Valor de f
$\alpha = 0.6$
$\alpha = 0.7$
$\alpha = 0.8$
$\alpha = 0.9$



No tenemos control sobre f, solo sobre α. Para un α el valor más alto ocurre en el punto de quiebre.

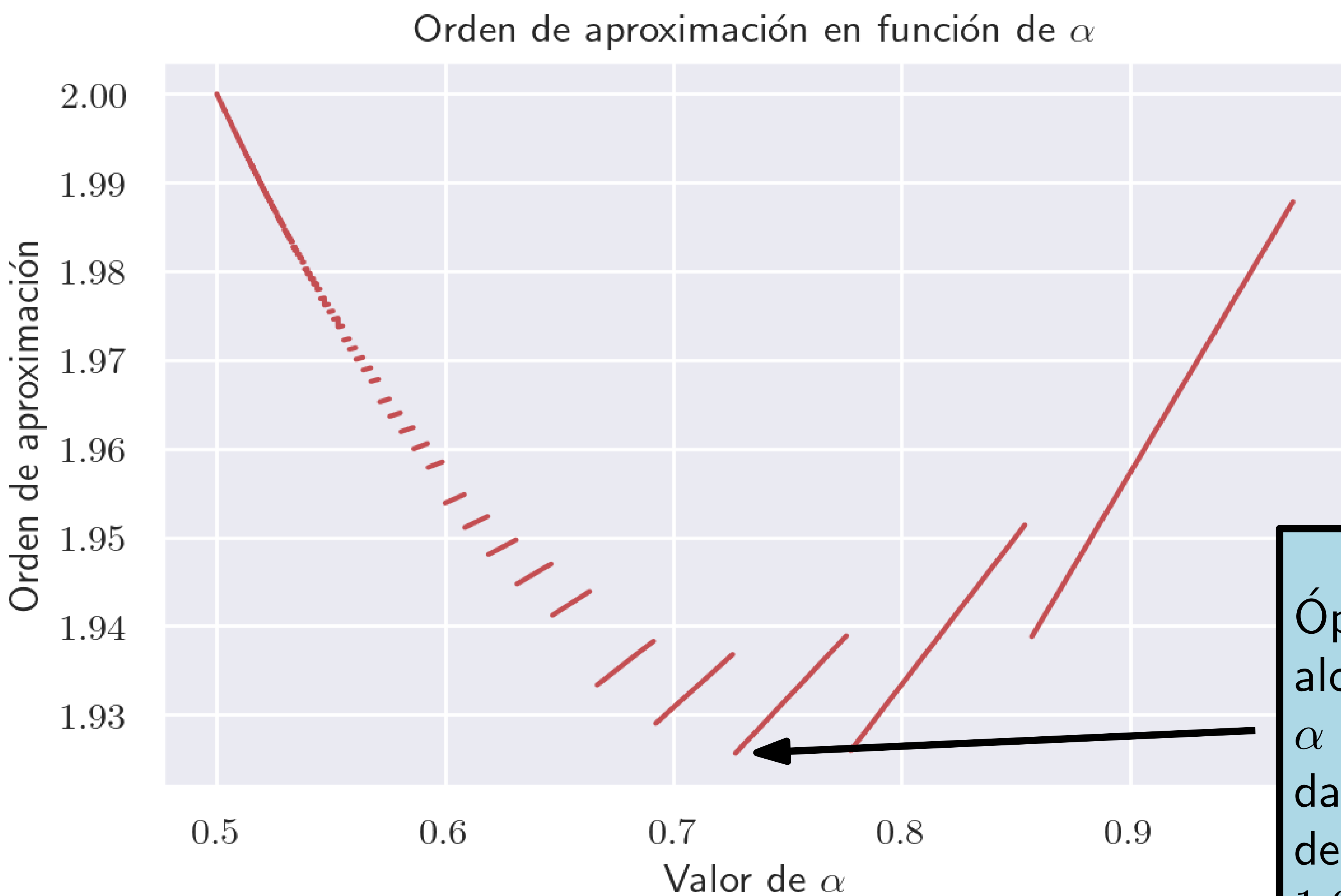


No tenemos control sobre f, solo sobre α. Para un α el valor más alto ocurre en el punto de quiebre.

$$f_\alpha = \frac{3}{3+2\lceil\frac{4-3\alpha}{2\alpha-1}\rceil+\lceil\frac{2-3\alpha}{2\alpha-1}\rceil}$$

$$\frac{\text{alg}}{\text{opt}} \leq 2 - 2(1-\alpha)f_\alpha$$

$$\frac{\text{alg}}{\text{opt}} \leq 2 - 2(1-\alpha) f_\alpha$$



Óptimo se alcanza en $\alpha = 8/11$, dando un orden de $233/121 \approx 1.9259$

Estructura de la tesis

Tamaño de una solución minimal

↓

ALG: (1) Construir conjunto de componentes que tengan pocas aristas por vértice
(2) Corregir

↓

Garantías de Aproximación

↓

Algoritmo Refinado

Intuición

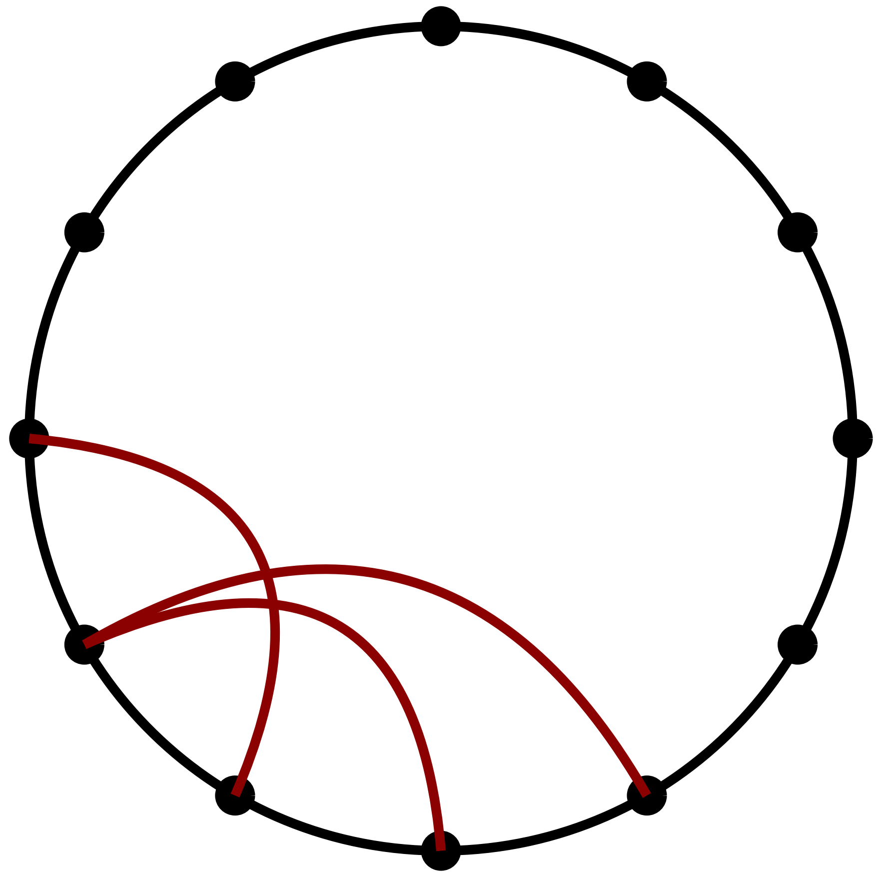
Actualmente: un único α

$\alpha = 0.6$

Intuición

Actualmente: un único α

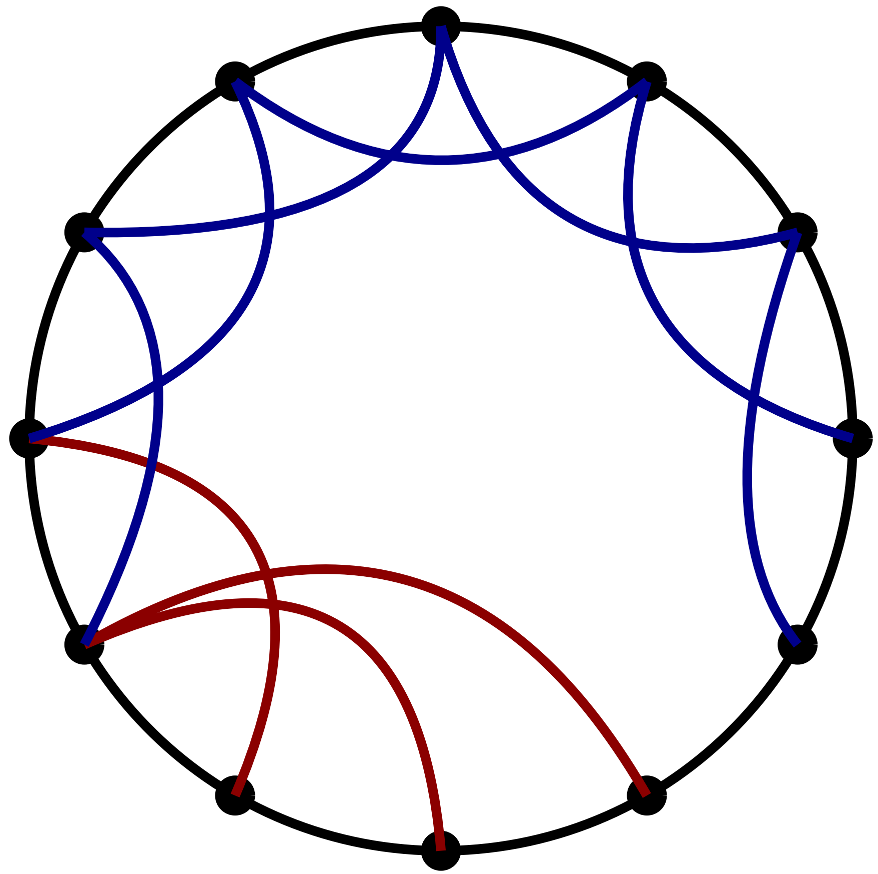
$\alpha = 0.6$



Intuición

Actualmente: un único α

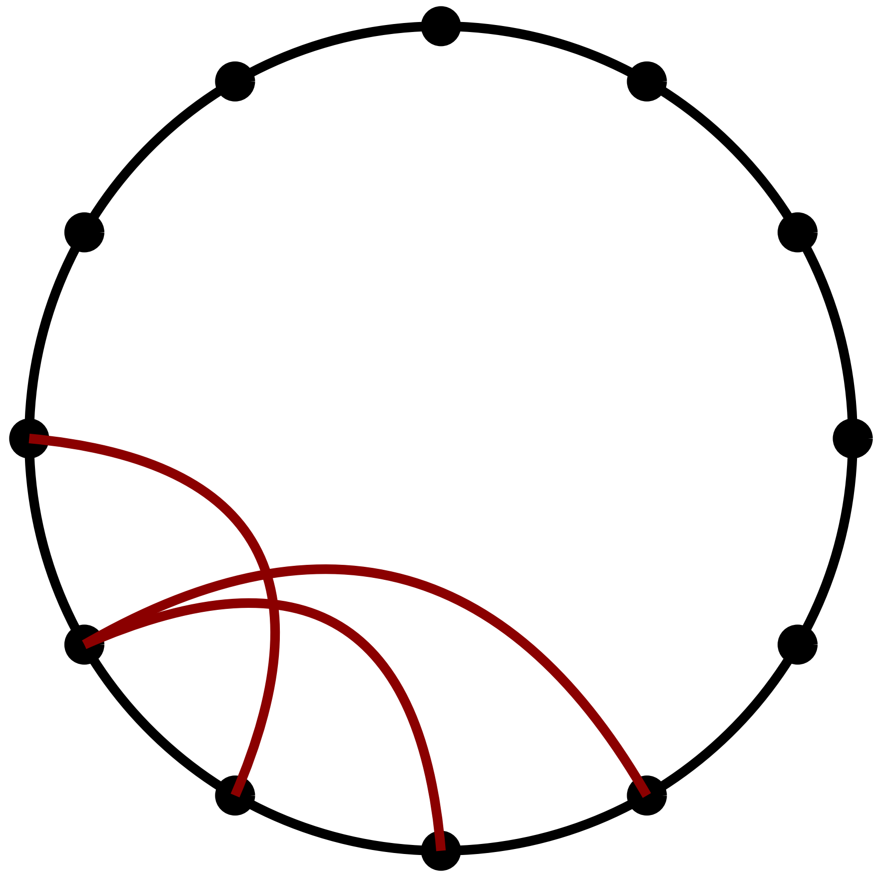
$\alpha = 0.6$



Intuición

Ahora: más de un α

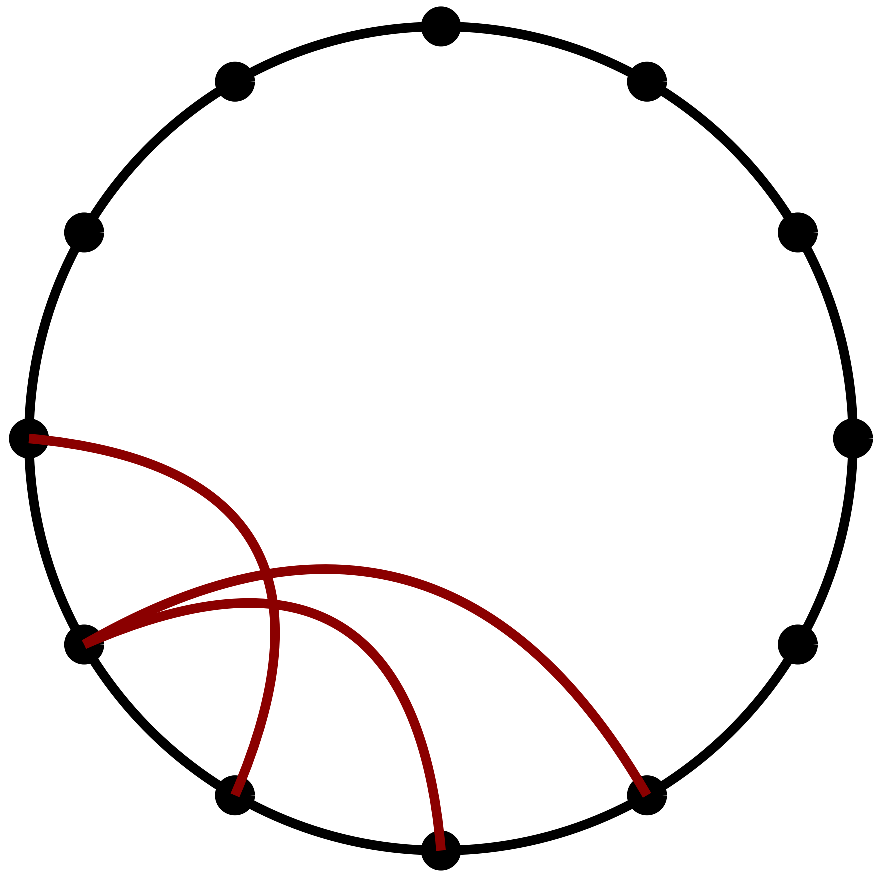
$\alpha_1 = 0.6$



Intuición

Ahora: más de un α

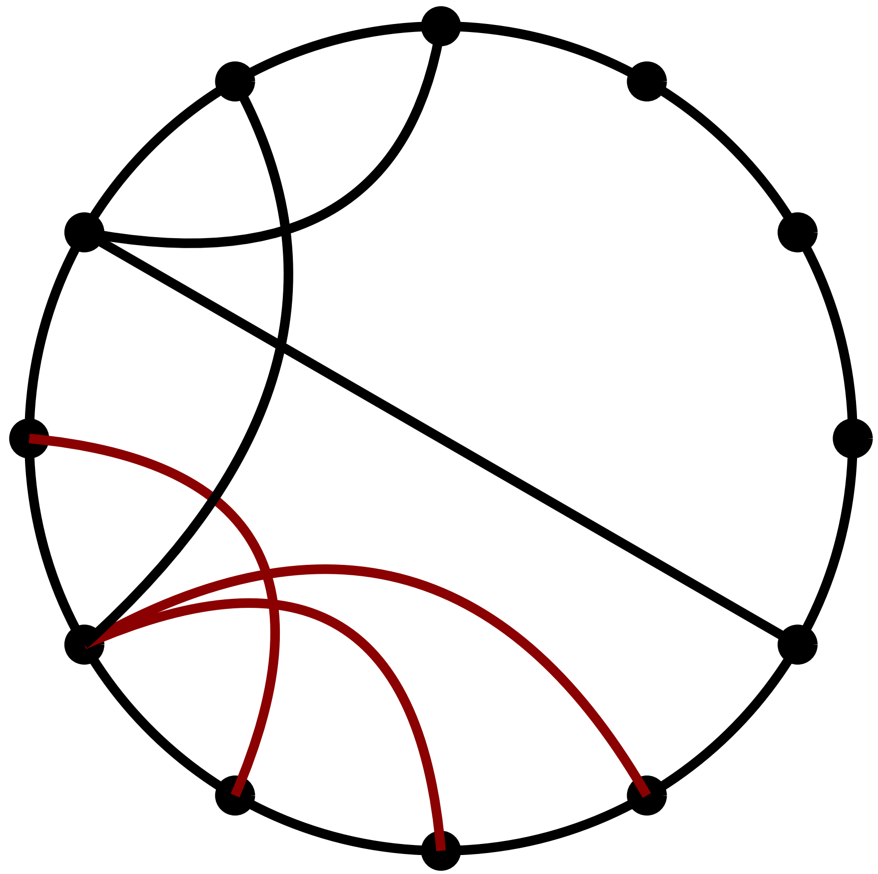
$\alpha_2 = 3/4$



Intuición

Ahora: más de un α

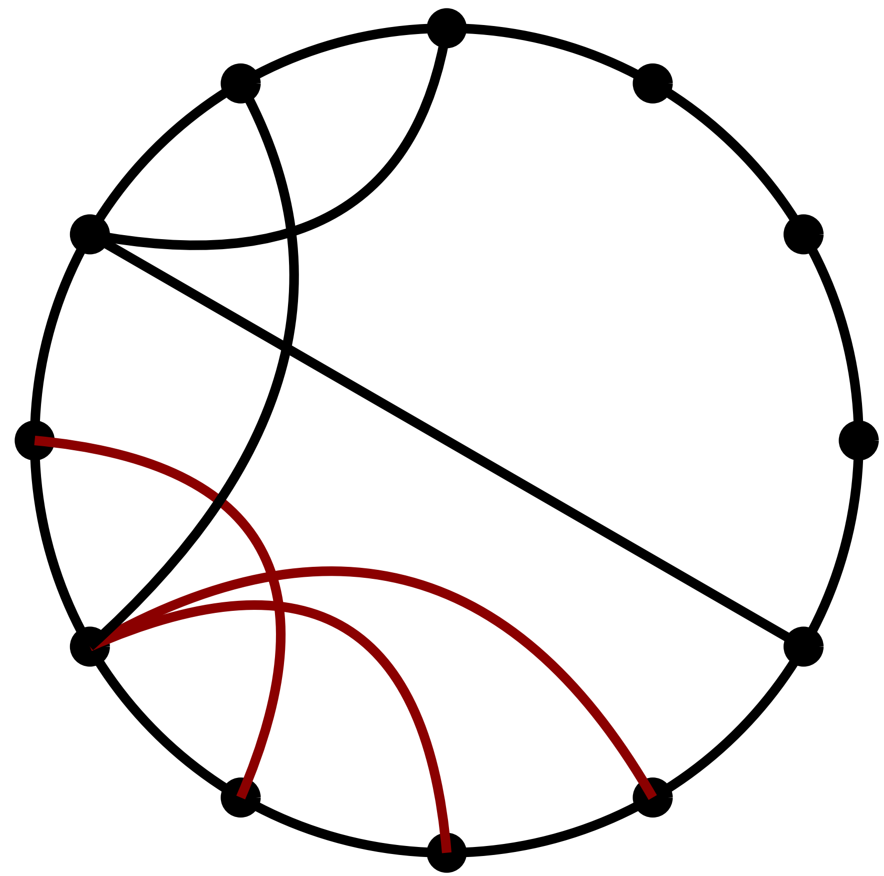
$\alpha_2 = 3/4$



Intuición

Ahora: más de un α

$\alpha_2 = 3/4$

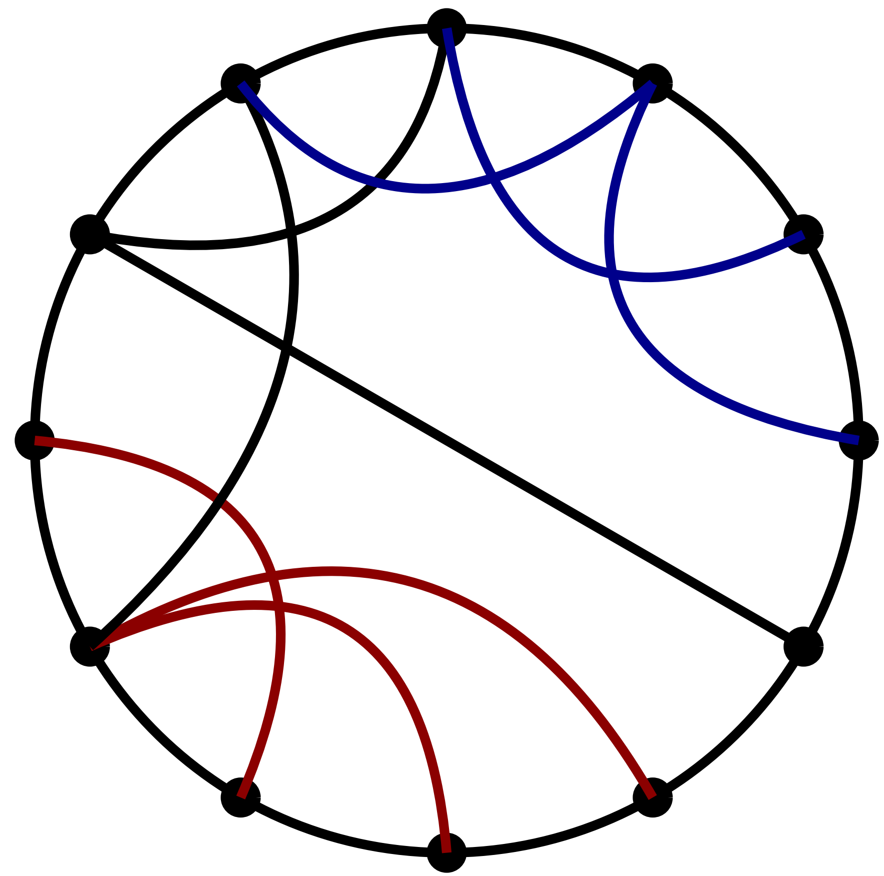


Añades conjuntos de aristas convenientes que no podías añadir antes!

Intuición

Ahora: más de un α

$\alpha_2 = 3/4$

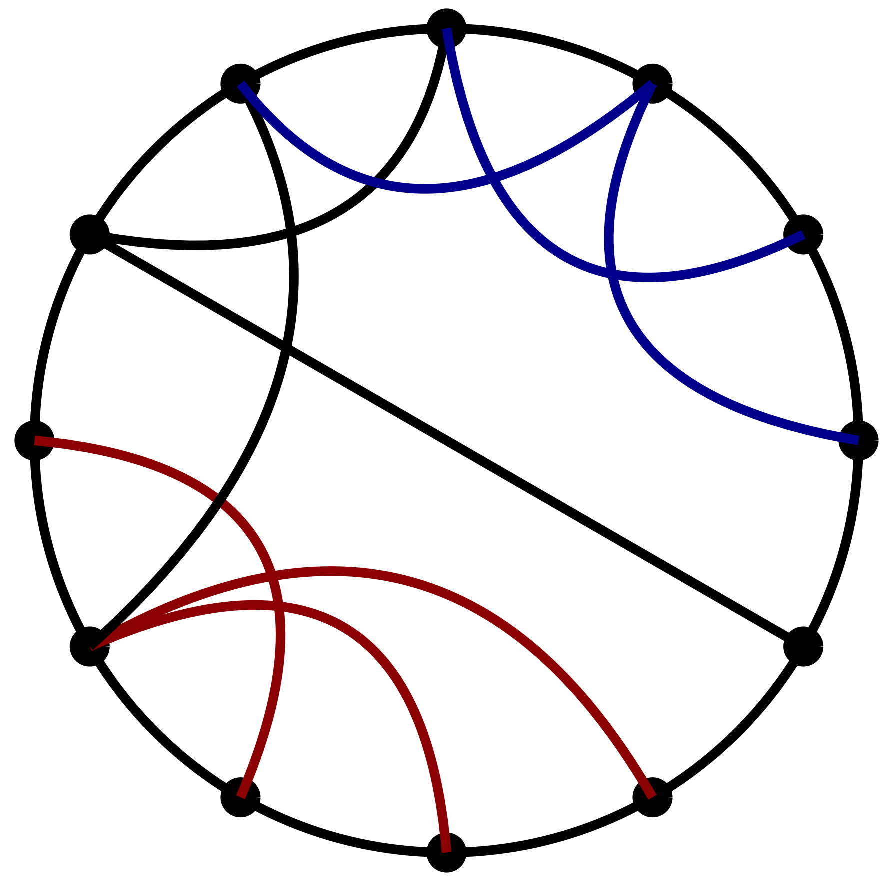


Añades conjuntos de aristas convenientes que no podías añadir antes!

Intuición

Ahora: más de un α

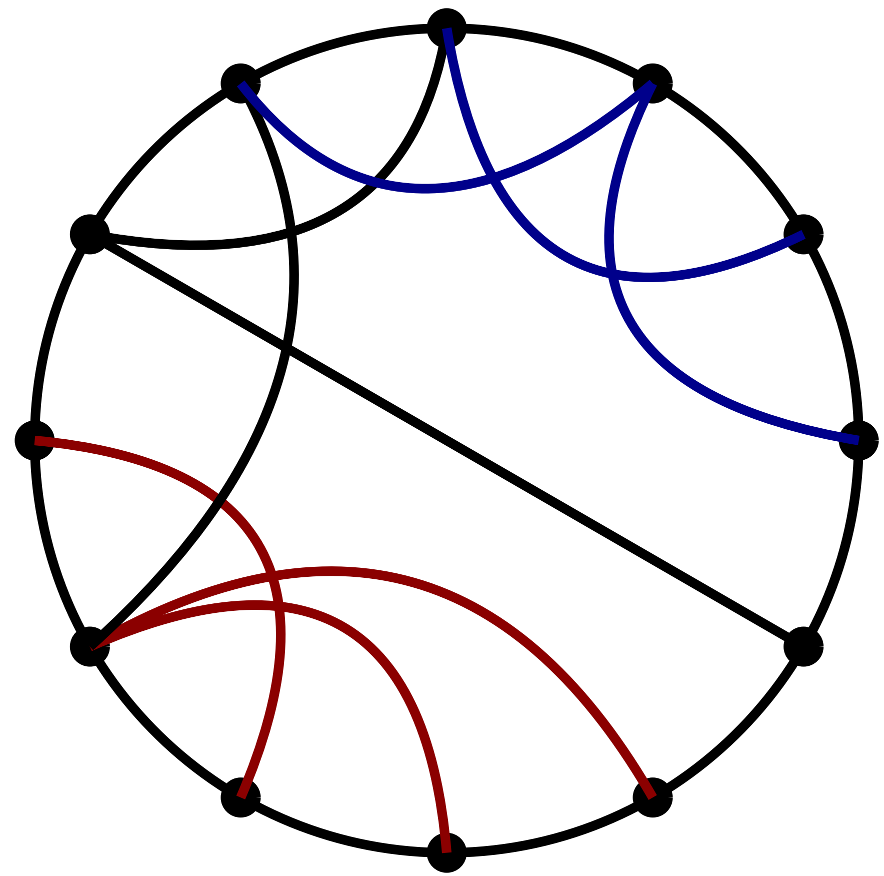
$\alpha_2 = 3/4$



Añades conjuntos de aristas convenientes que no podías añadir antes!

Algoritmo

Intuición



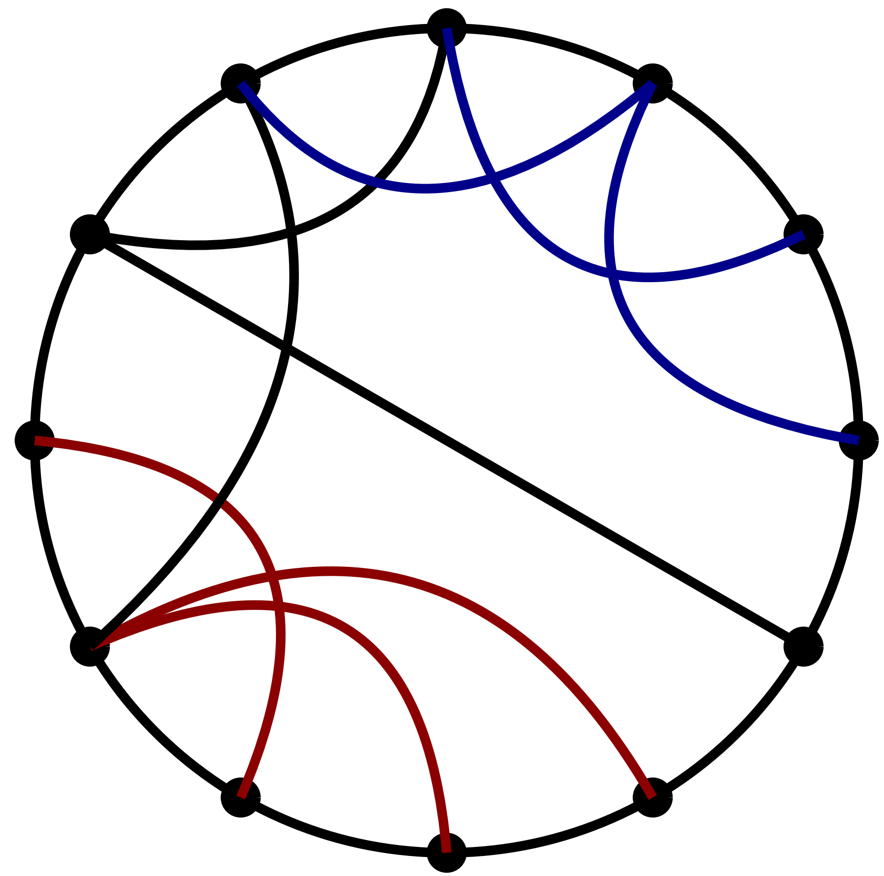
Añades conjuntos de aristas convenientes que no podías añadir antes!

Algoritmo

Entrada

- (C_n, S)
- $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}\}$
- $N_{max} \in \mathbb{N}$
- $F_0 \leftarrow \emptyset$

Intuición



Añades conjuntos de aristas convenientes que no podías añadir antes!

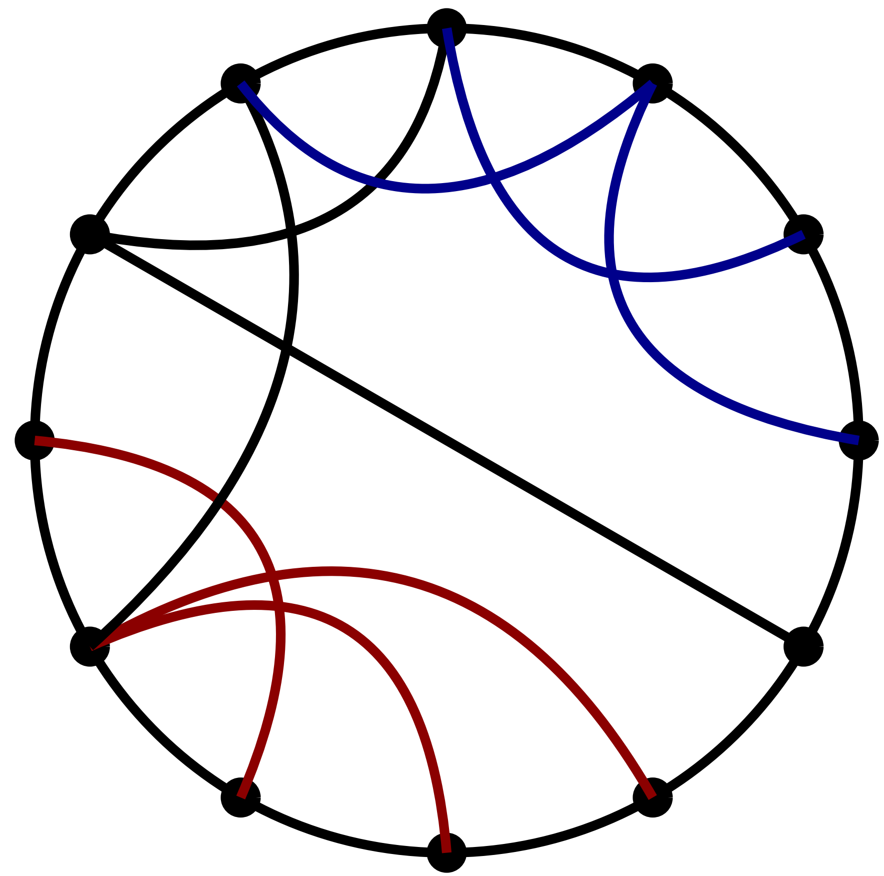
Algoritmo

Entrada

- (C_n, S)
- $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}\}$
- $N_{max} \in \mathbb{N}$
- $F_0 \leftarrow \emptyset$

para $i \in [s]$ **hacer**
Itera primera fase del algoritmo con $\alpha = \alpha_i$. Encontrando conjunto crítico $F_i \supseteq F_{i-1}$

Intuición



Añades conjuntos de aristas convenientes que no podías añadir antes!

Algoritmo

Entrada
- (C_n, S)
- $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}\}$
- $N_{max} \in \mathbb{N}$
- $F_0 \leftarrow \emptyset$

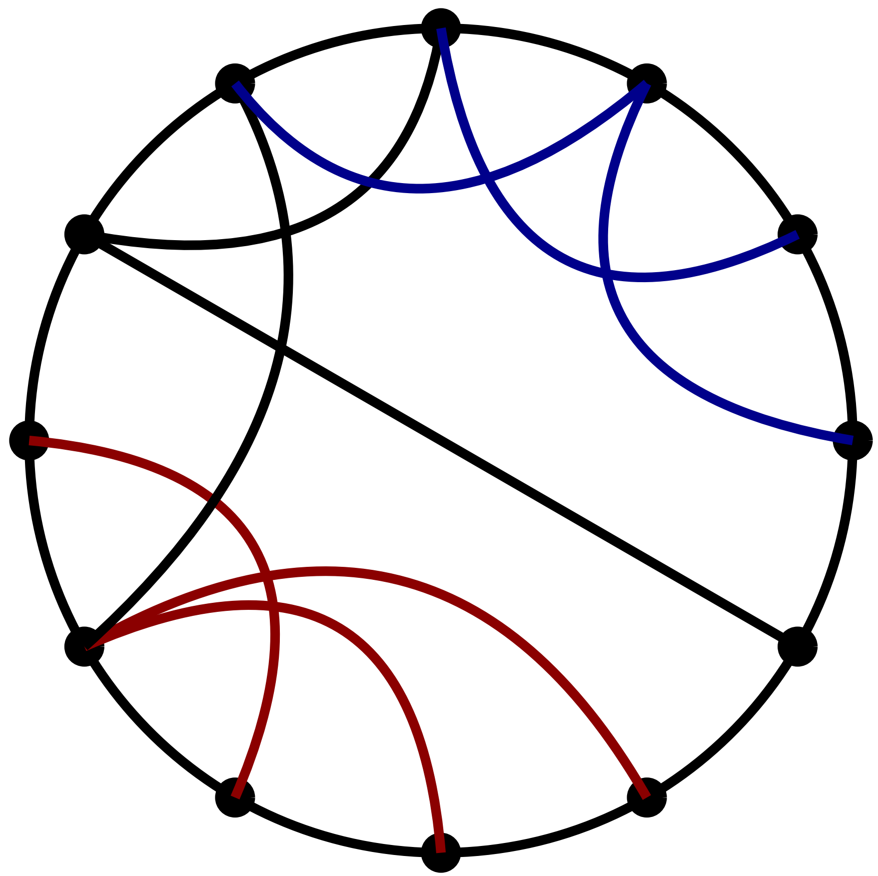
→

para $i \in [s]$ **hacer**
Itera primera fase del algoritmo con $\alpha = \alpha_i$. Encontrando conjunto crítico $F_i \supseteq F_{i-1}$

→

Encontrar completación minimal Q de F_s

Intuición



Añades conjuntos de aristas convenientes que no podías añadir antes!

Algoritmo

Entrada
- (C_n, S)
- $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}\}$
- $N_{max} \in \mathbb{N}$
- $F_0 \leftarrow \emptyset$

para $i \in [s]$ **hacer**
Itera primera fase del algoritmo con $\alpha = \alpha_i$. Encontrando conjunto crítico $F_i \supseteq F_{i-1}$

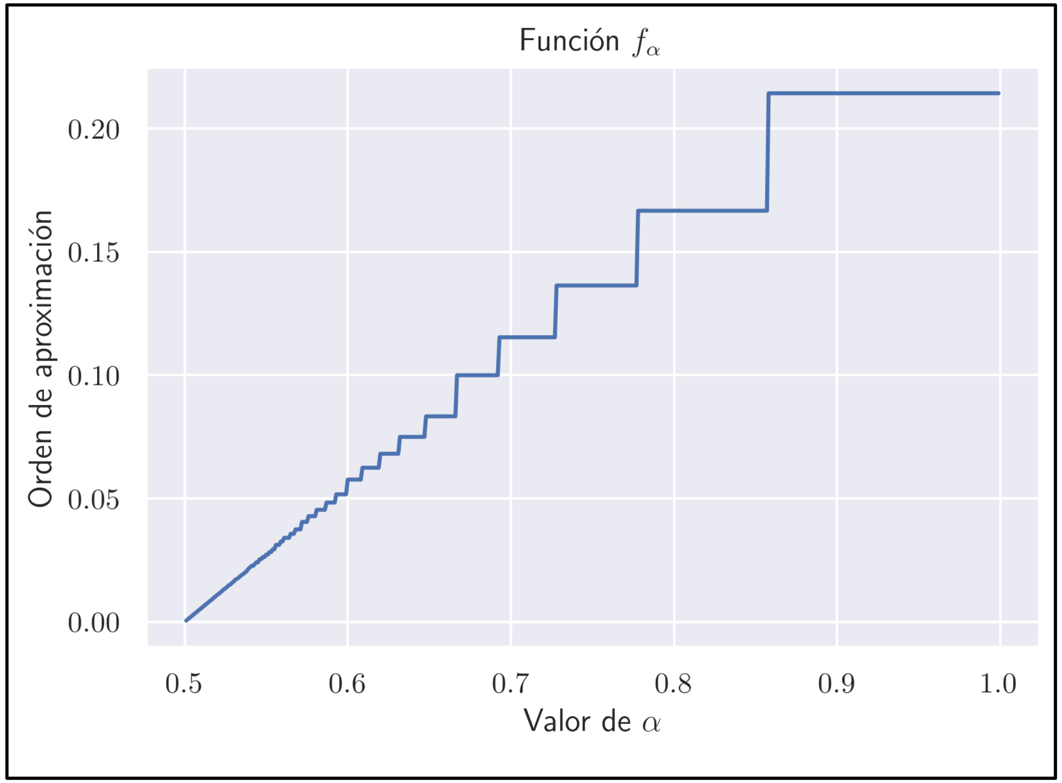
Encontrar completación minimal Q de F_s

devolver (Q, F)

$$\frac{|\,\mathrm{ALG}\,|}{|\,\mathrm{OPT}\,|} \leq 2 - 2\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) f_{\alpha_j}$$

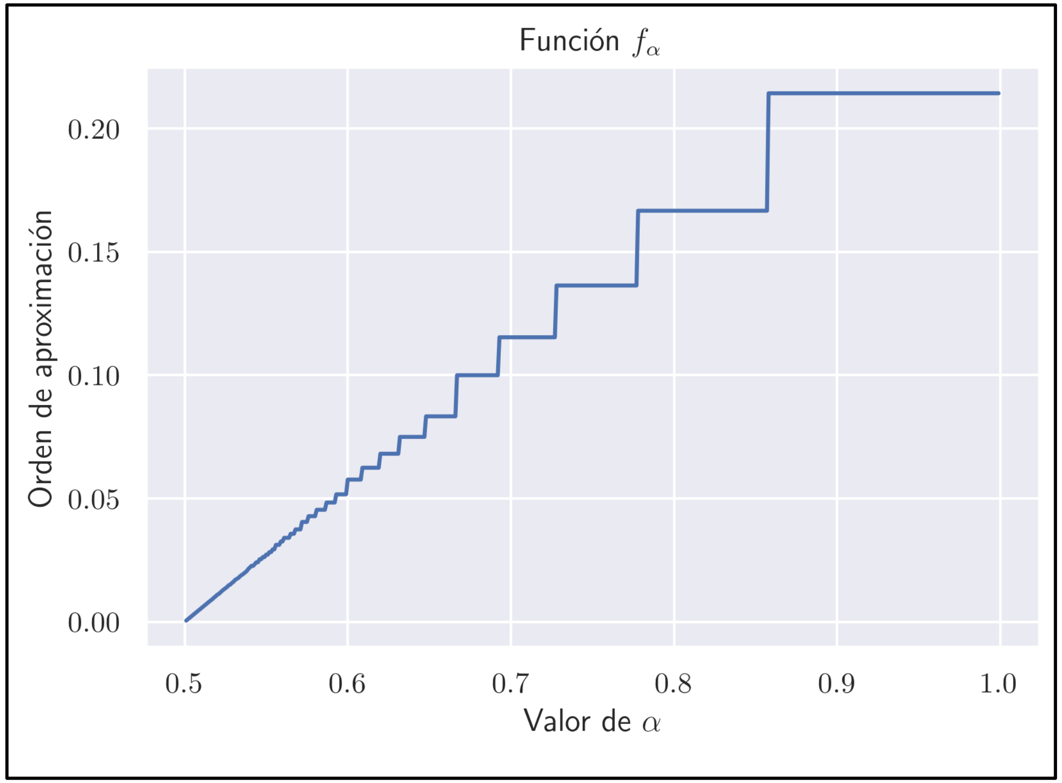
$$\frac{|\,\mathrm{ALG}\,|}{|\,\mathrm{OPT}\,|} \leq 2 - 2\underbrace{\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) f_{\alpha_j}}_{\int_{1/2}^{1} f_\alpha \mathrm{d}\alpha}$$

$$\frac{|\,\mathrm{ALG}\,|}{|\,\mathrm{OPT}\,|} \leq 2 - 2\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) f_{\alpha_j}$$



$$\int_{1/2}^{1} f_\alpha \mathrm{d}\alpha$$

$$\frac{|\,\mathrm{ALG}\,|}{|\,\mathrm{OPT}\,|} \leq 2 - 2\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) f_{\alpha_j}$$



$$\int_{1/2}^{1} f_\alpha \mathrm{d}\alpha$$

$$n^{O(1/\varepsilon)} \to 2 + \varepsilon - 2\int_{1/2}^{1} f_\alpha \mathrm{d}\alpha \approx 1.87029 + \varepsilon$$

Posibles extensiones

Sobre los algoritmos ¿Se puede extender a grafos 2-conexos generales?

Posibles extensiones

Sobre los algoritmos ¿Se puede extender a grafos 2-conexos generales?

Sobre la complejidad ¿Que podemos decir para el caso con pesos?

Posibles extensiones

Sobre los algoritmos ¿Se puede extender a grafos 2-conexos generales?

Sobre la complejidad ¿Que podemos decir para el caso con pesos?

Sobre un PL general para el problema No sabemos casi nada!

Posibles extensiones

Sobre los algoritmos ¿Se puede extender a grafos 2-conexos generales?

Sobre la complejidad ¿Que podemos decir para el caso con pesos?

Sobre un PL general para el problema No sabemos casi nada!

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{kl \in E} & x_{kl} \\
\text{sujeto a} \sum_{kl \sim ij} & x_{kl} \geq 1 \qquad \forall 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

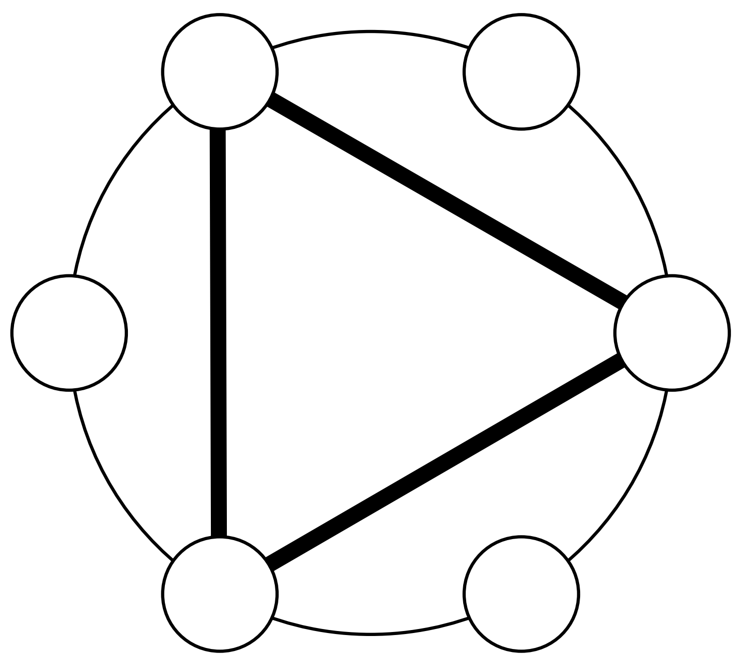
Posibles extensiones

Sobre los algoritmos ¿Se puede extender a grafos 2-conexos generales?

Sobre la complejidad ¿Que podemos decir para el caso con pesos?

Sobre un PL general para el problema No sabemos casi nada!

Definición: Sea C un ciclo y sea $P = (u_1, \ldots, u_k, u_1)$ un polígono de k vértices, el cual está inscrito en el ciclo y que cumple que ningún par de vértices es consecutivo en C, a este polígono lo denotamos un **polígono de cuerdas**



Posibles extensiones

Sobre los algoritmos ¿Se puede extender a grafos 2-conexos generales?

Sobre la complejidad ¿Que podemos decir para el caso con pesos?

Sobre un PL general para el problema No sabemos casi nada!
Definición: Sea C un ciclo y sea $P = (u_1, \ldots, u_k, u_1)$ un polígono de k vértices, el cual está inscrito en el ciclo y que cumple que ningún par de vértices es consecutivo en C, a este polígono lo denotamos un **polígono de cuerdas**

$$\min \sum_{kl \subset E} x_{kl}$$

$$\text{sujeto a} \sum_{kl \in \Gamma_P} x_{kl} \geq \left\lceil \frac{|P|}{2} \right\rceil \quad \forall \text{P polígono de cuerdas}$$

$$x \geq 0,$$

Algoritmos de aproximación para aumentar la vértice-conectividad de un ciclo

Francisco Sanhueza Matamala

Profesor Guía: José Soto San Martín
Profesor Co-Guía: José Correa Haeussler
Profesor Integrante: Ivan Rapaport Zimermann
Profesor Integrante: Waldo Gálvez Verdugo

28 de mayo de 2021 · Defensa de Tesis

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE